ELEMENTI

DI

MATEMATICA.

ELEMENTI
DI
MATEMATICA

Composti per uso della

REALE ACCADEMIA MILITARE

DAL PROFESSORE DI FISICA SPERIMENTALE, E CHIMICA, E DIRETTORE DELLE SCIENZE DELLA MEDESIMA

VITO CARAVELLI.

TOMO IV.

IN NAPOLI MDCCLXX.

PER GLI RAIMONDI

CON LICENZA DE' SUPERIORI.

ELEMENTI

DI

GEOMETRIA
SOLIDA.

INDICE

De' Capi contenuti in questo tomo.

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Solida.

CAP.

LIBRO II.

Delle teoriche de' Prismi, delle Piramidi, de' Cilindri, e de' Coni.

LIBRO III.

Della teorica della Sfera, che alla Geometria solida appartiene.

LI-

LIBRO IV.

Delle grandezze delle superficie, e delle solidità di più altri corpi, che occorre spesso nella pratica dover determinare.

ELEMENTI DI GEOMETRIA SOLIDA.

DEFINIZIONI, E NOZIONI PRELIMINARI.

DEFINIZIONE I.

1. SI dice una linea retta *cadere su d' un piano*, se è fuori della direzione del piano, e l' incontra con uno degli suoi estremi.

DEFINIZIONE II.

2. Si dice una retta *passare un piano*, se un punto di essa è nel piano, e le sue parti, divise da tale punto, sono una di qua, e l'altra di là dal piano.

DEFINIZIONE III.

3. Il punto, in cui una retta, che cade su d'un piano, o che passa un piano, incontra l'istesso piano, si dice *Punto dell' incontro*.

DEFINIZIONE IV.

4. Una retta si dice *Perpendicolare* a un piano, se ella cade sul piano, o passa il piano, ed è perpendicolare a tutte le rette, che si possono tirare nel piano dal punto dell' incontro.

Fig. 1. *Così AB si dice perpendicolare al piano LM, se è perpendicolare a tutte le rette BC, BD, BE, BF, BG, ec., che dal punto dell' incontro B si possono tirare nel piano LM.*

DEFINIZIONE V.

5. Una retta si dice *Inclinata* a un piano, se ella cade sul piano senza esserli perpendicolare.

DE-

DEFINIZIONE VI.

6. Se la retta AB è inclinata al piano Fig. 2. LM, e da qualunque suo punto C cade CD perpendicolare al piano LM; l'angolo CBD, formato dall' inclinata AB, e da BD, che congiugne i due punti degl'incontri B e D, si dice l'*Inclinazione* della retta AB al piano LM.

DEFINIZIONE VII.

7. Si dicono due rette *ugualmente inclinate* a due piani, se le loro inclinazioni a' piani sono uguali.

DEFINIZIONE VIII.

8. Si dice *Comune sezione* di due piani la linea, nella quale i due piani s' incontrano, o si tagliano.

DEFINIZIONE IX.

9. Un piano si dice *Perpendicolare* a un altro, se s' incontrano, o si tagliano, e tutte le rette, che si possono tirare in uno di essi piani, perpendicolari alla comune sezione, sono perpendicolari pure all' altro piano.

DEFINIZIONE X.

10. Un piano si dice *Inclinato* a un altro, che incontra, o che taglia, se l'uno non è perpendicolare all'altro.

DEFINIZIONE XI.

Fig. 3. 11. Se il piano AC è inclinato al piano LM, e da qualunque punto E della comune sezione AB si tirano le rette EF, EG, esistenti rispettivamente ne' piani AC, LM, e perpendicolari entrambe alla comune sezione AB; l'angolo acuto FEG, formato da sì fatte rette, si dice l'*Inclinazione* del piano AC al piano LM.

DEFINIZIONE XII.

12. Si dicono due piani *ugualmente inclinati* a due altri rispettivamente, se le loro rispettive inclinazioni sono uguali.

DEFINIZIONE XIII.

13. Due piani si dicono *Paralleli*, se, prolungati per tutte le direzioni all'infinito, non s'uniscono giammai.

DEFINIZIONE XIV.

14. Si dice *Angolo solido* l' inclinazione di più di due angoli piani, li quali sono tutti in piani diversi, hanno tutt'i loro vertici in un medesimo punto, e hanno altresì ciascuno de' lati, che combacia col lato dell' angolo contiguo. Si dice poi *Vertice* dell' angolo solido il punto, in cui s'uniscono i vertici di tutti gli angoli piani, che lo formano.

COROLLARIO.

15. Non potendosi del modo già detto unire due angoli piani, è facile a intendere non potere due angoli piani formare un angolo solido. Quindi per la formazione d'un angolo solido almeno si debbono congiugnere del modo suddetto tre angoli piani.

AVVERTIMENTO.

16. Si nomina l'angolo solido con tutte le lettere, che sono agli estremi de' lati degli angoli piani componenti, principiando da quella, ch'è al vertice; purchè non ne possa nascere equivoco. Così l'angolo solido, composto dagli angoli piani BAC, CAD, DAE, Fig.4. EAF, FAB, si nomina dicendo: *l' angolo solido ABCDEF*, ovvero *l'angolo solido in A*.

DEFINIZIONE XV.

17. Si dice *Piramide* un ſolido terminato da qualunque numero di triangoli rettilinei, che s'uniſcono tutti co' loro vertici in un punto, e dal rettilineo, che ha per lati le baſi de' medeſimi triangoli. Si dicono poi della piramide *Vertice* il punto, in cui s'uniſcono i vertici di tutt'i triangoli, *Baſe* il detto rettilineo, *Altezza* la perpendicolare calata dal vertice ſulla baſe, *Lati* i lati de' detti triangoli, *Superficie* la ſomma de' medeſimi triangoli, e finalmente *Superficie intera* la ſomma de' detti triangoli, una colla baſe.

DEFINIZIONE XVI.

18. Una piramide ſi dice *triangolare*, *quadrangolare*, o *poligona*, ſecondochè la ſua baſe è un triangolo, un quadrangolo, o un poligono. La piramide poligona poi ſi dice *pentagona*, *eſagona*, *ettagona*, ec., ſecondochè la ſua baſe è un pentagono, un eſagono, un ettagono, ec.

AVVERTIMENTO.

19. Si nomina la piramide, nominando prima la ſua baſe, e poſcia il ſuo vertice. Fig.4. Così dicendo: la piramide BCDEFA, ſi dee in-

intendere la piramide, che ha per base il rettilineo BCDEF, e per vertice il punto A.

DEFINIZIONE XVII.

20. Si dice *Prisma* un solido terminato da due rettilinei paralleli, uguali, e simili, e da tanti parallelogrammi, quanti sono i lati de' detti rettilinei, ognuno de' quali tramezza tra due lati omologhi de' medesimi rettilinei. Si dicono poi del prisma *Base* uno de' due detti rettilinei, considerato come parte inferiore della sua superficie, *Superficie* la somma de' parallelogrammi laterali, *Superficie intera* la somma de' detti parallelogrammi, una colla somma de' due detti rettilinei, *Altezza* la perpendicolare calata sulla base da qualunque punto del rettilineo opposto, e finalmente *Lati* i lati de' parallelogrammi, componenti la sua superficie.

DEFINIZIONE XVIII.

21. Il prisma si dice *retto*, o *obbliquo*, secondochè i lati, che cadono sulla base, sono perpendicolari, o inclinati all' istessa base. Si dice di più il prisma *triangolare*, *quadrangolare*, o *poligono*, secondochè la sua base è un triangolo, un quadrangolo, o un poligono. Finalmente il prisma poligono si dice *Prisma pentagono*, *esagono*, *ettagono*, ec.,

secondochè la sua base è un pentagono, un esagono, un ettagono, ec.

DEFINIZIONE XIX.

22. Si chiama *Parallelepipedo* un prisma quadrangolare, in cui ognuno de' piani, che lo terminano, è parallelo al piano opposto. D' ogni parallelepipedo poi si dicono *Base* qualunque de' piani, che lo terminano, considerato come parte inferiore della sua superficie, e *Diagonale*, o *Diametro* la retta, che congiungne i vertici di due de' suoi angoli solidi opposti.

DEFINIZIONE XX.

23. Un parallelepipedo si dice *rettangolo*, o *obbliquangolo*, secondochè i lati, che cadono sulla base, sono perpendicolari, o inclinati alla medesima base. Il parallelepipedo rettangolo poi si dice *Cubo*, se i sei parallelogrammi, che lo terminano, sono sei quadrati uguali.

DEFINIZIONE XXI.

24. Due solidi terminati da piani si dicono *simili*, se sono terminati da ugual numero di piani, e da piani rispettivamente simili.

DEFINIZIONE XXII.

25. Si chiama *Cono* un ſolido racchiuſo da un cerchio, e da una ſuperficie curva continuata, che termina da una parte nella periferia del detto cerchio, e dall' altra in un ſolo punto, e ch' è, quale verrebbe deſcritta da una retta, che foſſe affiſſa nel punto, in cui termina la ſuperficie da una parte, e che giraſſe per la periferia del detto cerchio con una perfetta rivoluzione.

DEFINIZIONE XXIII.

26. Del cono ſi dicono *Baſe* il cerchio, che lo termina da una parte, *Superficie conica* la ſuperficie, che lo termina dall' altra parte, *Superficie intera* la ſuperficie conica una colla baſe, *Vertice* il punto, in cui termina da una parte la ſuperficie conica, *Lato* ogni retta, procedente dal vertice a qualunque punto della periferia della baſe, *Aſſe* la retta, che congiugne il vertice col centro della baſe, e finalmente *Altezza* la perpendicolare calata ſulla baſe dal vertice.

DEFINIZIONE XXIV.

27. Un cono ſi dice *retto*, o *ſcaleno*, o ſia *obbliquo*, ſecondochè l' aſſe è perpendicolare

lare, o inclinato alla base. Si dicono di più *simili* due coni, se hanno gli assi ugualmente inclinati alle basi, e proporzionali a' diametri delle medesime basi.

AVVERTIMENTO I.

28. Si noti che, potendosi considerare ogni cerchio senza sensibile errore come un poligono composto da infiniti lati infinitamente piccioli; si potrà anche senza sensibile errore considerare ogni cono come una piramide, terminata lateralmente da infiniti triangoli infinitamente piccioli, che abbiano per basi i lati infinitamente piccioli, da' quali si può considerare composta la periferia della sua base, e per vertice comune il vertice dell' istesso cono.

AVVERTIMENTO II.

29. Si nomina il cono con nominare prima la base, e poscia il vertice. Così il Fig.5. cono, che ha per base il cerchio AB, e per vertice C, si nomina dicendo: *il cono* ABC.

DEFINIZIONE XXV.

30. Si dice *Cilindro* un solido terminato da due cerchi uguali, e paralleli, e da una superficie curva continuata, che termina nelle

le periferie de' due cerchi, e ch'è quale verrebbe descritta da una retta, che girasse per le periferie de' detti cerchi con una perfetta rivoluzione, conservandosi sempre parallela alla retta, che congiugne i centri de' medesimi cerchi.

DEFINIZIONE XXVI.

31. Del cilindro si dicono *Base* quel cerchio, che si considera come parte inferiore della sua superficie, *Superficie cilindrica* la superficie curva, che lo termina lateralmente, *Superficie intera* la superficie cilindrica, una con i due cerchi uguali, e paralleli, *Lato* ogni retta esistente nella superficie cilindrica, che congiugne due punti delle periferie de' due detti cerchi, *Asse* la retta, che congiugne i centri de' medesimi cerchi, e finalmente *Altezza* la perpendicolare calata sulla base da qualunque punto del cerchio opposto.

DEFINIZIONE XXVII.

32. Un cilindro si dice *retto*, o *scaleno*, o sia *obbliquo*, secondochè l'asse è perpendicolare, o inclinato alla base. Si dicono di più due cilindri *simili*, se gli assi sono ugualmente inclinati alle basi, e proporzionali a' diametri delle medesime basi.

AV.

AVVERTIMENTO.

33. Si noti che, potendosi considerare ogni cerchio senza sensibile errore come un poligono composto da infiniti lati infinitamente piccioli; si potrà anche senza sensibile errore considerare ogni cilindro come un prisma, lateralmente terminato da infiniti parallelogrammi infinitamente piccioli, racchiusi tra i corrispondenti lati infinitamente piccioli, da' quali si possono le periferie de' due cerchi considerare composte.

DEFINIZIONE XXVIII.

34. Si dice *Sfera* un solido, ch'è terminato intorno intorno da una sola superficie curva, e che ha un punto in esso tale, che tutte le rette, che si possono tirare da tale punto alla detta superficie, sono tra loro uguali.

DEFINIZIONE XXIX.

35. Della sfera si dicono *Superficie sferica* la superficie curva, che la termina, *Centro* il punto, onde procedono rette uguali a tutt' i punti della detta superficie, *Raggi* le rette uguali, procedenti dal centro alla superficie, e finalmente *Diametro* ogni retta, che passa pel centro, e giugne da ambe

le

le parti alla ſuperficie sferica.

COROLLARIO.

36. Eſſendo i raggi metà de' diametri, ſi diranno i raggi anche *Mezzi diametri*.

DEFINIZIONE XXX.

37. Chiamiamo *Sezione sferica* il piano, che naſce nella sfera, qualora da un piano viene diviſa in due parti.

AVVERTIMENTO.

38. A ſuo luogo ſi dimoſtrerà che ogni ſezione sferica è un cerchio, la cui periferia è nella ſuperficie della sfera.

DEFINIZIONE XXXI.

39. Si chiama *Porzione sferica* il ſolido racchiuſo da una ſezione sferica, e dalla porzione, che la periferia dell' iſteſſa ſezione taglia dalla ſuperficie della sfera. La porzione sferica poi ſi dice *Mezza sfera*, ſe la ſezione sferica paſſa pel centro della sfera.

DEFINIZIONE XXXII.

40. Della porzione sferica ſi dicono *Baſe* la ſezione sferica, che la termina da una par-

parte, *Superficie* la porzione della ſuperficie sferica, che la termina dall' altra parte, *Altezza* la perpendicolare alla baſe, procedente dal centro dell' iſteſſa baſe, e finalmente *Vertice* il punto della ſuperficie, in cui l' altezza l' incontra. Si dicono di più *Porzioni ſimili* di sfere quelle, che hanno le altezze proporzionali a' diametri delle loro baſi.

DEFINIZIONE XXXIII.

41. Si dice *Settore sferico* il ſolido terminato dalla ſuperficie d' una porzione sferica, e dalla ſuperficie del cono, che ha per baſe la baſe della medeſima porzione, e per vertice il centro della sfera. E finalmente ſi dicono *Settori ſimili* di sfera quelli, che corriſpondono a porzioni ſimili.

ASSIOMI

ASSIOMA I.

42. Per una linea retta poſſono paſſarvi infiniti diverſi piani per infinite diverſe direzioni.

AS-

ASSIOMA II.

43. Per una linea curva o una sola superficie piana per una sola direzione può passarvi, o niuna.

COROLLARIO.

44. Dunque la linea, per cui passano due superficie piane per due direzioni diverse, è una linea retta; e conseguentemente linea retta è la comune sezione di due piani.

ASSIOMA III.

45. Se due punti d' una retta sono in un piano, l' intera retta è nell' istesso piano; e nel medesimo piano prolungato dee essere la medesima retta prolungata.

COROLLARIO.

46. Quindi una retta non può avere una sua parte in un piano, e la parte rimanente innalzata sul medesimo piano. E di più una retta, che congiugne due parallele, esser deve nel medesimo piano delle parallele.

ASSIOMA IV.

47. Tutte le parti di qualunque triangolo

lo rettilineo formano un ſolo piano continuato.

COROLLARIO.

48. Potendoſi ogni angolo rettilineo ridurre in triangolo: è manifeſto eſſere ogni angolo rettilineo in un piano; e conſeguentemente, ſe due rette s' interſecano, vi dee ſempre eſſere un piano, che deve paſſare per ambedue, e su cui ſi debbono interſecare.

ASSIOMA V.

49. Due angoli ſolidi ſono uguali, ſe, poſto l' uno entro dell' altro, combaciano inſieme.

COROLLARIO.

50. Sono dunque uguali due angoli ſolidi, ſe coſtano d' ugual numero d' angoli piani, e di angoli piani riſpettivamente uguali.

ASSIOMA VI.

51. Due ſolidi terminati da piani rettilinei ſono uguali, e ſimili tra loro, ſe ſono terminati da piani uguali di numero, e uguali e ſimili tra loro riſpettivamente.

LI-

LIBRO I.

Delle teoriche fondamentali della Geometria Solida.

CAP. I.

Della teorica delle rette perpendicolari a' piani.

PROP. I. TEOR. I.

52. *Se la retta AB incontra due altre CD, EF nel punto B, ove elleno s' interſecano, ed è perpendicolare ad ambedue, è perpendicolare ancora al piano LM, che paſsa per CD, EF.* Fig. 6.

DIMOSTRAZIONE.

Per B, preſe BC, BE, BD, BF tutte uguali, e di qualunque lunghezza, e congiunte le rette AC, AE, AD, AF, CE, DF, s' intenda nel piano LM tirata qualunque retta GH, e s' intendano congiunte le rette AG, AH. Eſſendo gli angoli ABC, ABE, ABD, ABF tutti retti per l'ipoteſi;

saranno le rette AC, AE, AD, AF tutte uguali (§ 19 *del tom.* 2). Similmente, per l'uguaglianza degli angoli CBE, FBD (§76 *del tom.* 2), sono CE = DF, e l'angolo BEC = BFD (§ 98 *del tom.* 2). Onde ne' triangoli CAE, DAF è l' angolo AEC = AFD (§ 99 *del tom.* 2). In oltre sono ne' triangoli EBG, FBH l'angolo EBG=FBH (§ 76 *del tom.* 2), l'angolo BEG = BFH, e conseguentemente BGE = BHF, e 'l lato BE = BF. Dunque sono anche EG = FH, e BG = BH (§ 100 *del tom.* 2). Di più, avendo i triangoli AEG, AFH il lato AE = AF, EG = FH, e l'angolo AEG=AFH, sarà AG = AH. Finalmente, avendo i triangoli ABG, ABH il lato BG = BH, il lato AB comune, e la base AG = AH, uguali saranno gli angoli ABG, ABH (§99 *del tom.* 2), e conseguentemente retti. Sicchè AB è perpendicolare a GH. Dell' istesso modo si dimostra essere AB perpendicolare a ogni altra retta, che si può tirare per B nel piano LM. Dunque AB è perpendicolare al piano LM (§ 4). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

53. Essendo le rette AC, AE, AD, AF tutte uguali; è chiaro che tutte le rette, che si possono tirare dal punto A agl' infiniti punti del piano LM, ugualmente di-

distanti da B, sono tutte uguali. E perciò tutti gl' infiniti lati d' un cono retto sono tra loro uguali.

PROP. II. TEOR. II.

54. *Se la retta AB incontra più di due altre rette BC, BD, BE, ec. nel punto B, ove elleno s' unifcono, ed è a tutte queste tali rette perpendicolare; sì fatte rette BC, BD, BE, ec. sono tutte in un istesso piano.* Fig. 7.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB perpendicolare a BC, BD, sarà AB perpendicolare al piano LM, che passa per BC, BD (§ 52). Or se nel medesimo piano LM non è anche BE, non può essere BE la comune sezione del piano LM col piano, che passa per AB, BE. Sia, s'è possibile, sì fatta comune sezione BF. Sarà l' angolo ABF retto (§ 4), e perciò uguale ad ABE. Ma ciò è impossibile (§ 59 *del tom.* 2). Dunque è pure impossibile che BE non sia nel piano LM. Similmente si dimostra essere ogni altra retta tirata dal punto B, a cui è perpendicolare AB, nel piano LM. Per la qual cosa, se la retta AB incontra, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. III. TEOR. III.

Fig.8. 55. *Se due rette AB, CD, che cadono sul piano LM, sono tra loro parallele, e AB è perpendicolare al piano LM, anche CD è perpendicolare al medesimo piano LM.*

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri BD, e da D si tiri in LM la DE perpendicolare a BD, e uguale a AB, e si congiungano AD, AE, BE. Ne' triangoli rettangoli ABD, EDB sono il lato AB = ED, il lato BD comune, e l'angolo ABD = EDB (§ 61 *del tom.* 2). Dunque AD = BE (§ 98 *del tom.* 2). In oltre ne' triangoli ABE, ADE sono AB = DE, BE = AD, e AE comune. Dunque è l'angolo ABE = ADE (§ 99 *del tom.* 2). Ma l'angolo ABE è retto (§ 4). Sicchè anche ADE è retto. Onde ED è perpendicolare a DB, DA, e perciò è perpendicolare al pano, che passa per BD, DA (§ 52). Ma DB, DA sono nel piano delle parallele AB, CD (§ 46). Dunque ED è perpendicolare al piano delle parallele AB, CD. E perciò l'angolo CDE è retto (§ 4). E' di più, per le parallele AB, CD, la somma de' due angoli ABD, CDB uguale a due retti (§ 83 *del tom.* 2). Dunque, essendo ABD retto, retto è anche CDB.

CDB. Per la qual cosa CD è perpendicolare alle due DB, DE, e conseguentemente perpendicolare al piano LM, in cui sono DB, DE (§52). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. IV. TEOR. IV.

56. Se le rette AB, CD sono ambedue perpendicolari al piano LM, sono tali rette tra loro parallele.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda fatta la costruzione della prop. prec.. Sarà, come s'è nella prec. prop. dimostrato, ED perpendicolare a DA. Ma ED è perpendicolare anche a DB, e DC. Dunque DC è nel piano, che passa per DB, DA (§ 54). E' pure AB nell'istesso piano, che passa per DB, DA (§ 47). Sicchè AB, DC sono in un istesso piano. Per la qual cosa, essendo retto sì l'angolo ABD, che CDB (§ 4), le rette AB, CD sono parallele (§ 80 *del tom.* 2). Ch'è cio, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

57. Quindi per un punto esistente in un piano, o fuori della sua direzione non vi può passare, se non se una sola retta per-

pendicolare al medesimo piano: altrimenti rette, che s' unirebbero in un punto, sarebbero tra loro parallele; il che è impossibile.

AVVERTIMENTO I.

58. Da quanto si è dimostrato fin qui si ricava che due rette parallele a una terza, ancorchè non sieno tutte e tre in un istesso piano, sono parallele pure tra loro. In fatti sieno EF, CD parallele ad AB, e sieno AB, EF nel piano ABFE, e AB, CD nel piano ABDC. Si prenda in AB ad arbitrio il punto G, e per G si tirino ne' medesimi piani GI, GH, perpendicolari entrambe a AB, e si congiunga IH. Per gli angoli retti AGI, AGH, sarà AB perpendicolare al triangolo IGH (§ 52); e, per essere ad AB parallele EF, CD, all' istesso triangolo IGH saranno perpendicolari ancora EF, CD (§ 55). Onde EF, CD sono tra loro parallele (§ 56).

Fig. 9.

AVVERTIMENTO II.

59. Ciò, che s' è dimostrato intanto nel precedente avvertimento, ci fa conoscere di più che, se due rette EA, CA, che in un piano s' uniscono in qualunque punto A, sono parallele rispettivamente alle due altre FB, DB, che in un altro piano pure s' uniscono in qualsisia punto B, l' angolo EAC, forma-

mato dalle due prime, è uguale all' angolo FBD, formato dalle due feconde. In fatti, prendendo AE = BF, e AC = BD, e congiugnendo AB, EF, CD; per effere uguali, e parallele sì AE, BF, che AC, BD, farà ad AB uguale e parallela sì EF, che CD (§ 85 *del tom.* 2). Onde EF, CD fono pure uguali, e parallele tra loro; e confeguentemente EC = FD. Per la qual cofa l' angolo CAE = DBF (§ 19 *del tom.* 2).

PROP. V. PROBL. I.

60. *Dato un piano, e dato un punto fuori della fua direzione, calare dal dato punto una perpendicolare al piano dato.*

Soluzione.

Sieno LM il piano dato, e A il punto dato fuori della direzione di LM. Fig. 10.

1 In LM fi tiri ad arbitrio CD; e fu CD fi cali da A la perpendicolare AB (§ 73 *del tom.* 2).

2. Da B s' innalzi fu CD, e nel piano LM la perpendicolare BO (§ 72 *del tom.* 2)

3. Finalmente da A fi cali fu BO la perpendicolare AO (73 *del tom.* 2).

Dico effere AO la perpendicolare cercata.

DIMOSTRAZIONE.

Per O ſi tiri OE parallela a CD (§ 86 *del tom.* 2).

Eſſendo retti gli angoli DBO, DBA; ſarà al triangolo ABO perpendicolare DB (§ 52), e conſeguentemente perpendicolare anche EO (§ 55). Dunque gli angoli AOE, AOB ſono retti; e perciò AO è perpendicolare al piano LM, in cui ſono OE, OB (§ 52). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP. VI. PROBL. II.

61. *Dato un punto in un piano, innalzare dal dato punto una perpendicolare al piano dato.*

SOLUZIONE.

Fig.8.

Sia B il punto dato nel piano LM.

1. Si prenda ad arbitrio il punto C fuori della [illegible]zione del piano LM; e da C ſi cali ſu LM la perpendicolare CD (§ *prec.*). Se CD incontra LM in B, il probl. è ſciolto; altrimenti

2. Si congiunga BD, e nel piano, che paſſa per BD, DC, ſi tiri BA parallela a DC (§ 86 *del tom.* 2). Dico eſſere AB la perpendicolare cercata.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AB, CD parallele, e CD perpendicolare a LM per la costruzione, sarà al piano LM perpendicolare anche AB (§ 55). Sicchè dal punto B s'è innalzata AB perpendicolare al piano LM. Ch'è ciò, che bisognava fare, e dimostrare.

CAP. II.

Della teorica delle rette inclinate a' piani.

PROP. VII. TEOR. V.

62. *Se da qualunque punto A, esistente fuori della direzione del piano LM, cadono sull'istesso piano l'inclinata AO, e la perpendicolare AB, e nel medesimo piano si descrive col centro O, e con qualunque intervallo OC il cerchio CDEF. Dico, tirata la retta OB, e prolungata in C ed E, di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare agl'infiniti punti diversi della periferia CDEF, 1 che sia AC la minima; 2 che sia AE la massima; 3 che delle altre sia la più vicina alla* Fig. 11.

alla minima minore di quelle, che ne sono piu distanti; 4 che ognuna, diversa da AC, e AE, non può averne, se non un' altra sola, che le sia uguale.

DIMOSTRAZIONE.

Dal punto B a' punti qualunque G e H della periferia CDEF si tirino BG, BH; e, tirata di più BI = BH, si congiungano AG, AH, AI.

I. Essendo BC minore di BG (§ 146 *del tom.* 2), sarà la somma de' quadrati di AB, BC minore della somma de' quadrati di AB, BG. Onde il quadrato di AC è minore del quadrato di AG, e conseguentemente AC minore di AG. Similmente si dimostra AC minore d'ogni altra retta, che da A si può tirare alla periferia CDEF. Sicchè di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare agl' infiniti punti della detta periferia, AC è la minima.

II. Essendo BE maggiore di BH (§. 146 *del tom.* 2), sarà la somma de' quadrati di AB, BE maggiore della somma de' quadrati di AB, BH; onde il quadrato di AE è maggiore del quadrato di AH, e conseguentemente AE maggiore di AH. Similmente si dimostra AE maggiore d'ogni altra retta, che da A si può tirare alla periferia CDEF. Sicchè di tutte le infinite rette, che da A si possono tirare alla detta pe-

periferia, AE è la massima.

III. In oltre, essendo BG minore di BH (§ 146 *del tom.* 2), sarà la somma de' quadrati di AB, BG minore della somma de' quadrati di AB, BH. Onde il quadrato di AG è minore del quadrato di AH, e conseguentemente AG è minore di AH. Dunque la AG, ch' è più vicina alla minima AC, è minore di AH, che n' è più lontana.

IV. Finalmente, avendo i triangoli ABH, ABI il lato BH = BI, il lato AB comune, e l'angolo ABH = ABI (§ 61 *del tom.* 2), sarà AH = AI (§ 98 *del tom.* 2). Or se da A si tira un' altra retta alla periferia CDEF, ella sarà o più vicina alla minima AC, o più distante di AH; e perciò sarà minore, o maggiore di AH. Per la qual cosa ogni retta tirata da A alla periferia CDEF non può averne, se non un' altra sola uguale. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

63. Essendo BH = BI, sarà l' angolo BOH = BOI (§ 19 *del tom.* 2); onde uguali sono pure gli archi CH, CI (158 *del tom.* 2). Dunque uguali sono le rette AH, AI, che incontrano la periferia in punti ugualmente distanti dal punto C.

PROP.

PROP. VIII. TEOR. VI.

64. *Sia l'istesso, che s'è supposto nella prop. prec., e sia DF perpendicolare a CE. Dico di tutti gl'infiniti angoli, che si possono formare dall'inclinata AO cogl'infiniti raggi, che si possono tirare nel cerchio CDEF, 1 che l'angolo AOD è retto; 2 che l'angolo AOG è minore del retto, e tanto più minore del retto, quando più OG s'avvicina al raggio OC; 3 che l'angolo AOH è maggiore del retto; e tanto più maggiore del retto, quanto più OH s'avvicina a OE; 4 che l'angolo AOC è il minimo di tutti gli acuti, e AOE il massimo di tutti gli ottusi, che AO può fare co' detti raggi; 5 finalmente che ognuno de' detti angoli, diverso da AOC, AOE, non può averne, se non se un'altro solo, che li sia uguale.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Si congiungano le rette AD, AF. Essendo i punti D, e F ugualmente distanti dal punto C, sarà AD = AF (§ *prec.*). Onde gli angoli AOD, AOF sono uguali (§ 19 *del tom. 2*), e conseguentemente retti.

II. Avendo gli angoli AOG, AOD i lati rispettivamente uguali, e la base AG minore di AD (§ *prec.*), sarà l'angolo AOG minore del retto AOD (§ 19 *del tom. 2*). In oltre divenendo AG tanto più picciola,

la, quanto più il punto G s' avvicina al punto C; sarà l' angolo AOG tanto più minore del retto, quanto più OG s' avvicinerà ad OC.

III. Avendo gli angoli AOH, AOD i lati rispettivamente uguali, e la base AH maggiore di AD (§ *prec.*); sarà l' angolo AOH maggiore del retto AOD (§ 19 *del tom.* 2). Di più divenendo AH tanto più maggiore, quanto più il punto H s' avvicina al punto E; sarà l' angolo AOH tanto più maggiore del retto, quanto più OH s' avvicinerà a OE.

IV. Essendo AC la minima di tutte le rette, che si possono tirare da A alla periferia CDEF, e AE la massima (§ *prec.*); sarà l' angolo AOC il minimo di tutti gli acuti, e AOE il massimo di tutti gli ottusi, che si possono formare da AO co' raggi del cerchio CDEF.

V. Finalmente, avendo gli angoli AOH, AOI i lati rispettivamente uguali, e la base AH = AI, sarà l' angolo AOH = AOI (§ 19 *del tom.* 2). Altr' angolo non può essere uguale ad AOH; perchè niun'altra retta si può tirare da A alla periferia CDEF, che sia uguale ad AH. Dunque ognuno de' detti angoli, diverso da AOC, AOE, non può averne, se non un' altro uguale. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

65. Essendo l'angolo AOB l' inclinazione di AO al piano LM (§ 6): è manifesto essere l'inclinazione d' una retta a un piano il minimo di tutti gli angoli acuti, che si possono formare dall'inclinata con rette tirate nel piano dal punto dell' incontro.

CAP. III.

Della teorica de' piani, che s' incontrano, o s' intersecano perpendicolarmente.

PROP. IX. TEOR. VII.

Fig. 12. 66. *Se due piani AB, LM s' incontrano nella retta FB, e la perpendicolare OC, calata da qualunque punto O del piano AB sulla comune sezione FB, è perpendicolare pure al piano LM; sarà il piano AB anche perpendicolare al piano LM.*

DIMOSTRAZIONE.

Si tiri in AB, ovunque si vuole, la ED parallela a OC. Sarà ED perpendicolare sì a FB

a FB, che al piano LM (§ 55). Dunque AB cade su LM in modo, che ogni retta tirata in AB, perpendicolare alla comune sezione FB, è anche perpendicolare a LM. Onde il piano AB è perpendicolare al piano LM (§ 9). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. X. TEOR. VIII.

67. *Sia la retta OC perpendicolare al piano LM. Dico che ogni piano, che passa per OC, è anche perpendicolare al piano LM.*

DIMOSTRAZIONE.

Essendo per l' ipotesi OC perpendicolare a LM, sarà perpendicolare alla comune sezione del piano LM con qualsisia altro, che passa per OC (§ 4). Sicchè ogni piano, che passa per OC, è perpendicolare al piano LM (§ *prec.*). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XI. TEOR. IX.

68. *Se due piani AC, EG s' intersecano, e sono ambidue perpendicolari al terzo piano LM; la comune sezione OP di tali piani AC, EG è anche perpendicolare al piano LM.* Fig. 13.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere OP perpendicolare a LM; si potranno dal punto O innalzare due rette, diverse da OP, ambedue perpendicolari a LM; però una nel piano AC, e l'altra nel piano EG. Ma ciò è impossibile (§ 57). Dunque è impossibile che OP non sia perpendicolare a LM. Sicchè se due piani, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP XII. TEOR. X.

Fig. 12. 69. *Se il piano AB è perpendicolare al piano LM, la perpendicolare calata su LM da qualunque punto O del piano AB caderà nella comune sezione FB.*

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega cadere la perpendicolare calata da O su LM nella comune sezione FB, si potrà da O calare un' altra retta perpendicolare a FB; sarà questa perpendicolare anche al piano LM (§ 9). Dunque da O si possono calare due perpendicolari a LM. Ma ciò è impossibile (§ 57). Dunque è impossibile che la perpendicolare calata da O su LM non caschi nella comune sezione FB. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP.

C A P. IV.

Della teorica de' piani paralleli.

PROP. XIII. TEOR. XI.

70. *Se una retta AB è perpendicolare a due piani PQ, RS, tali piani sono tra loro paralleli.* Fig. 14.

DIMOSTRAZIONE.

Se si niega essere i piani PQ, RS paralleli, prolungati verso qualche parte s' uniranno. Onde ne' piani PQ, RS si possono tirare da A e B due rette, che si uniscano, e che facciano conseguentemente con AB un triangolo. Ma ciascuna di tali rette deve formare con AB un' angolo retto (§ 4). Dunque in un triangolo vi sono due angoli retti. Ora ciò è impossibile (§ 89 *del tom.* 2). Sicchè è impossibile che PQ, RS non sieno paralleli. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XIV. TEOR. XII.

71. *Se due retet AB, AC, che in un pia-* Fig. 15.

no s' uniscono in qualunque punto A, sono paralle rispettivamente a due altre DE, DF, che in un altro piano s' uniscono pure in qualsisia punto D; il piano ABC, nel quale sono le due prime, è anche parallelo al piano DEF, in cui sono le altre due.

DIMOSTRAZIONE.

Da A si cali sul piano DEF la perpendicolare AG; e per G si tirino nel piano DEF le rette GH, GI rispettivamente parallele a DE, DF. Saranno GH, GI rispettivamente parallele anche ad AB, AC (§ 58). Essendo retti gli angoli AGH, AGI (§ 4), retti saranno pure gli angoli GAB, GAC (§ 83 *del tom. 2*). Dunque la retta AG, calata perpendicolare al piano DEF, è anche perpendicolare al piano ABC (§ 52). E perciò il piano ABC è parallelo al piano DEF (§ *prec.*). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XV. TEOR. XIII.

72. *Se due piani paralleli vengono tagliati da un altro piano, le comuni sezioni sono anche rette parallele.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 16. Sieno AB, CD due piani paralleli, e sieno intersecati dal piano LMNO. Se si nie-

ga essere le comuni sezioni LM, NO rette parallele, prolungate s'uniranno. Onde s'uniranno anche i piani AB, CD prolungati per la direzione, verso cui s'uniranno LM, NO. Ma ciò è impossibile (§ 13). Dunque è impossibile che LM, NO non sieno parallele. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XVI. TEOR. XIV.

73. *Se due rette, comunque situate, vengono tagliate da più di due piani paralleli; le porzioni d'una di tali rette, che tramezzano tra sì fatti piani, sono proporzionali alle porzioni dell'altra, che tramezzano pure tra gli medesimi piani.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno LD, MH due rette comunque situate; e i piani paralleli NO, PQ, RS, TV taglino LD ne' punti A, B, C, D, e MH ne' punti E, F, G, H. Dal punto A al punto H si tiri AH, che incontra i piani ne' punti A, I, K, H, e si congiungano le rette IB, KC, HD, GK, FI, AE. Saranno AE, IF, KG le comuni sezioni del piano AEH co' piani NO, PQ, RS, e BI, CK, DH le comuni sezioni del piano HAD co' piani PQ, RS, TV. Onde AE, IF, KG saranno tra loro parallele, e Fig. 17.

 tra

tra loro parallele anche BI, CK, DH (§ *prec.*). Perciò alle rette AI, IK, KH sono proporzionali sì EF, FG, GH, che AB, BC, CD (§ 293 *del tom.* 2). Sicchè EF, FG, GH sono proporzionali ad AB, BC, CD (§245 *del tom.* 2). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

74. Essendo AB, BC, CD proporzionali ad AI, IK, KH; ne segue che, se due rette AD, AH s'uniscono in qualunque punto A, e vengono tagliate da piani paralleli PQ, RS, TV, le porzioni dell'una sono proporzionali alle porzioni dell'altra.

PROP. XVII. PROBL. III.

75. *Dato un piano, e dato un punto fuori della sua direzione, tirare pel punto dato un altro piano parallelo al dato.*

SOLUZIONE.

Fig. 15. Sia DEF il piano dato, e A il dato punto.

1. Da A si cali su DEF la perpendicolare AG (§ 60).

2. Da A s'innalzino su AG per due direzioni diverse due perpendicolari AB, AC (§ 72 *del tom.* 2).

Dico essere BAC il piano cercato.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Essendo AG perpendicolare ad AB, AC, sarà perpendicolare ancora al piano BAC (§ 52). E' pure AG perpendicolare al piano EDF per la costruzione. Dunque il piano BAC è parallelo al piano EDF (§ 70). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

76. Si noti che 'l proposto probl. si può sciorre in quest' altro modo. Sia DBF il piano dato, e sia A il dato punto. Si congiunga AB, e per A si tirino ne' piani ABD, ABF le rette AC, AE parallelè rispettivamente a BD, BF; sarà il piano CAE parallelo a DBF (§ 59). Fig. 9.

C A P. V.

Della teorica degli angoli solidi.

PROP. XVIII. TEOR. XV.

77. *Se un angolo solido A è composto da tre angoli piani, ognuno di sì fatti angoli piani è minore della somma degli altri due.* Fig. 18.

DIMOSTRAZIONE.

Sia l'angolo ſolido in A composto dagli tre angoli piani CAD, DAB, BAC. Se tali angoli ſono uguali; è chiaro che ognuno è minore della ſomma degli altri due. Se poi ſono diſuguali. Sia CAD il maſſimo. Si prendano in AC, AD i punti C e D ad arbitrio; e, congiunta CD, ſi faccia in A, e nel piano del triangolo CAD l'angolo CAE = CAB (§67 *del tom.* 2); e di più, tagliata AB = AE, ſi congiungano CB, BD. Avendo gli angoli uguali CAE, CAB i lati riſpettivamente uguali, ſarà la baſe CE = CB (§ 19 *del tom.* 2). Ma nel triangolo CBD il lato CD è minore della ſomma di CB, BD (§ 63 *del tom.* 2). Dunque DE è minore di BD (§ 55 *del tom.* 2). In oltre, eſſendo AE = AB, il lato AD comune, e la baſe DE minore di DB, ſarà l'angolo EAD minore dell'angolo BAD (§ 19 *del tom.* 2). E perciò la ſomma degli angoli CAE, EAD, o ſia l'angolo CAD è minore della ſomma degli angoli CAB, BAD. Eſſendo dunque l'angolo maſſimo minore della ſomma degli altri due, molto più ognuno degli altri due ſarà minore della ſomma de' rimanenti. Per la qual coſa ſe un angolo ſolido, ec.. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

PROP.

PROP. XIX. TEOR. XVI.

78. *La somma di tutti gli angoli piani, che formano qualunque angolo solido, è minore di quattro angoli retti.*

DIMOSTRAZIONE.

Contrassegni A qualunque angolo solido, Fig.4. composto dagli angoli piani BAC, CAD, DAE, EAF, FAB. Si tirino a qualunque distanza da A le rette BC, CD, DE, EF, FB in modo, che facciano il poligono BCDEF. S' avranno ne' punti B, C, D, E, F angoli solidi, composto ognuno da tre angoli piani. Essendo tutti gli angoli della figura BCDEF, una con quattro retti, uguali a tanti retti, quanti ne disegna il doppio del numero de' lati della figura (§ 90 *del tom.* 2), o del numero de' triangoli BAC, CAD, DAE, EAF, FAB; e perciò uguali alla somma di tutti gli angoli de' medesimi triangoli; ed essendo la somma degli angoli alle basi di sì fatti triangoli maggiori della somma degli angoli della figura BCDEF (§ *prec.*). Sarà la somma degli angoli piani, che formano l' angolo solido in A minore della somma di quattro angoli retti. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

79. Essendo ogni angolo di qualunque triangolo equilatero $\frac{2}{3}$ di un retto, sei di sì fatti angoli saranno uguali a quattro retti. Onde con angoli di triangoli equilateri si possono formare tre soli angoli solidi, uno composto da tre de' detti angoli piani, un altro composto da quattro, e un altro composto da cinque.

COROLLARIO II.

80. In oltre, essendo retto ogni angolo di qualunque quadrato, e uguale a $\frac{6}{5}$ d' un retto ogni angolo di qualunque pentagono regolare; possono formare un angolo solido e tre angoli di quadrati, e tre angoli di pentagoni regolari; con un numero maggiore de' detti angoli piani non è possibile formare angolo solido.

COROLLARIO III.

81. Essendo di più ogni angolo di qualunque esagono regolare $\frac{8}{6}$ d' un retto, tre di tali angoli formano quattro retti. Dunque con angoli d' esagoni regolari in niuna maniera si può formare un angolo solido. Molto meno si può formare un angolo solido con angoli di ettagoni, di ottogoni, di nonagoni, ec. regolari. Sicchè le figure piane re-

regolari, cogli angoli delle quali si possono formare angoli solidi, sono il triangolo equilatero, il quadrato, e 'l pentagono regolare.

COROLLARIO IV.

82. Non potendosi dunque avere, se non cinque angoli solidi, composto ognuno da angoli di figure regolari della medesima spezie; è facile a intendere che non vi possono essere, se non cinque solidi, detti *solidi regolari*, terminato ognuno da figure regolari uguali, e della medesima spezie; cioè il *Tetraedro*, terminato da quattro triangoli uguali, ed equilateri, l'*Ottaedro* da otto, e l'*Icosaedro* da venti, il *Cubo*, terminato da sei quadrati uguali, e 'l *Dodecaedro*, terminato da dodici pentagoni uguali, e regolari; combinati gli angoli piani, componenti gli angoli solidi, nel primo, quarto, e quinto di sì fatti solidi a tre a tre, nel secondo a quattro a quattro, e nel terzo a cinque a cinque.

PROP. XX. TEOR. XVII.

83. *Se i tre angoli piani AOB, AOC, COB, componenti l'angolo solido O, sono rispettivamente uguali agli tre angoli piani EPF, EPG, GPF, che formano l'angolo solido P; prese ne' lati OC, PG ad arbitrio due porzioni uguali OH, PK, e calate dagli punti H e K le* Fig. 19.

le perpendicolari HI, KL su i piani AOB, EPF, saranno sì fatte perpendicolari HI, KL tra loro uguali.

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano posti gli angoli solidi O e P in modo, che combacinino il vertice O col vertice P, l'angolo AOB con EPF, AOC con EPG, e COB con GPF. Combacerà OH con PK; e conseguentemente combacerà HI con KL. Sicchè sarà HI = KL (§ 57 *del tom.* 2). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

84. Combaciando OH con PK, e HI con KL; combaceranno ancora, congiunte le rette OI, PL, gli angoli HOI, KPL. Dunque gli angoli HOI, KPL sono anche tra loro uguali.

Fine del primo Libro.

LIBRO II.

Delle teoriche de' Prismi, delle Piramidi, de' Cilindri, e de' Coni.

CAP. I.

Della grandezza delle superficie de' Prismi, delle Piramidi, de' Cilindri, e de' Coni; e delle ragioni, che hanno sì fatte superficie e tra loro, e colle basi de' medesimi soli.

PROP. I. TEOR. I.

85. *La superficie d' ogni prisma retto è uguale al rettangolo fatto dal perimetro della sua base, e da uno de' lati perpendicolari all' istessa base.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 20. Contrassegni ACIG qualsisia prisma retto. Sarà la sua superficie uguale alla somma de' rettangoli AH, BI, CK, DF, AF. Ma sì fatta somma, essendo i detti rettangoli d' uguali altezze, uguaglia il rettangolo fatto dal perimetro ABCDE, e dal lato AG. Dunque la superficie d' ogni prisma retto è uguale al rettangolo fatto dal perimetro della sua base, e da uno de' lati perpendicolari all' istessa base. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLOLLARIO I.

86. Potendosi ogni cilindro retto considerare senza errore sensibile come un prisma retto (§ 33); sarà la superficie d'ogni cilindro retto uguale al rettangolo fatto da uno de' suoi lati, e dalla periferia della sua base.

COROLLARIO II.

87. Quindi la superficie d' ogni cilindro retto sta alla sua base, come il lato alla metà del raggio della base.

AV-

AVVERTIMENTO.

88. Ciò, che s'è dimostrato dunque e circa l'uguaglianza, e circa le ragioni de' rettangoli nella Geometria piana, compete anche alle superficie e de' prismi retti, e de' cilindri retti e circa la loro uguaglianza, e circa le loro ragioni.

PROP. II. TEOR. II.

89. *La superficie d'ogni prisma obbliquo è uguale al rettangolo, che ha per base il perimetro di qualunque sezione fatta nell'istesso prisma, perpendicolare a' lati, che cadono sulla base, e per altezza uno de' medesimi lati.*

DIMOSTRAZIONE,

Contrassegni ACEG qualunque prisma obbliquo; e in esso s'intenda fatta la sezione LMNO perpendicolare a' lati AF, BG, CH, DE. Sarà la superficie di sì fatto prisma uguale alla somma de' parallelogrammi obbliquangoli AG, BH, CE, DF. Ma sì fatta somma è uguale al rettangolo, che ha per altezza AF, e per base la somma di LM, MN, NO, OL, o sia il perimetro della sezione LN. Sicchè la superficie d'ogni prisma obbliquo è uguale al rettangolo, ec. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare. Fig. 21.

CO-

COROLLARIO.

90. Potendosi ogni cilindro obbliquo considerare senza errore sensibile come un prisma obbliquo (§ 33) ; sarà la superficie d'ogni cilindro obbliquo uguale al rettangolo, che avrà per base il perimetro di qualunque sezione fatta nell'istesso cilindro perpendicolare a' lati, e per altezza uno de' medesimi lati.

AVVERTIMENTO I.

91. Ciò, che s'è dimostrato dunque e circa l'uguaglianza, e circa le ragioni de' rettangoli nella Geo. piana, compete anche alle superficie e de' prismi obbliqui, e de' cilindri obbliqui e circa la loro uguaglianza, e circa le loro ragioni.

AVVERTIMENTO II.

92. La sezione fatta in qualunque cilindro scaleno, perpendicolare a' lati, è la figura terminata dalla curva, detta *Ellisse* dagli Geometri. Però di sì fatta figura si tratterà nelle sezioni coniche.

PROP. III. TEOR. III.

93. *La superficie d'ogni piramide, che ha tutt'*

tutt' i triangoli laterali d' uguali altezze, è uguale a un triangolo, che ha per base il perimetro della sua base, e per altezza l' altezza d' uno de' triangoli laterali.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo tutt' i triangoli laterali d' uguali altezze per l' ipotesi; il triangolo, che avrà per base la somma delle loro basi, e per altezza l' altezza di uno di essi, sarà uguale alla somma di tutti, e conseguentemente uguale alla superficie della piramide. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

94. Potendosi considerare ogni cono retto senza sensibile errore come una piramide, terminata da infiniti triangoli isosceli d'uguali altezze (§ 28); sarà la superficie conica d' ogni cono retto uguale al triangolo, che ha per base la periferia della sua base, e per altezza l' altezza d' uno de' detti triangoli, o sia uno de' suoi lati.

COROLLARIO II.

95. Quindi la superficie conica d'un cono retto sta alla sua base, come il lato del cono al raggio dell' istessa base.

AV-

AVVERTIMENTO I.

96. Ciò, che s'è dimostrato dunque e circa l'uguaglianza, e circa le ragioni de'triangoli nella Geo. piana, compete anche alle superficie delle piramidi, che hanno i triangoli laterali d' uguali altezze, e de' coni retti e circa la loro uguaglianza, e circa le loro ragioni.

AVVERTIMENTO II.

97. Se la piramide non ha tutt' i triangoli laterali d'uguali altezze, la sua superficie non si può determinare con un solo triangolo, ma con determinare ciascuno di quelli, che la compongono. E se il cono è scaleno, la sua superficie non si può in conto alcuno avere; perchè la Geom. elementare non giugne a determinare la somma d'infiniti triangoli di basi uguali, e di altezze disuguali, e la sublime non ha saputo finora somministrarci regola alcuna, che si possa nella pratica adoperare.

PROP. IV. TEOR. IV.

Fig.22. 98. *Se dalla piramide ABCDEO, che ha tutt' i triangoli laterali d' uguali altezze, se ne tagli la porzione FGHIKO, facendo la sezione FGHIK parallela alla base ABCDE; sarà*

sarà la superficie della piramide troncata ABCDEKFGHI uguale al rettangolo fatto dalla metà della somma de' perimetri ABCDE, FGHIK, e dall' altezza del trapezio ABGF.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo i triangoli, componenti la superficie dell' intera piramide, d' uguali altezze per l' ipotesi, e 'l piano FGHIK parallelo alla base ABCDE anche per l' ipotesi; saranno le rette FG, GH, HI, IK, KF parallele rispettivamente a AB, BC, CD, DE, EA (§ 72), e i trapezj ABGF, BCHG, CDIH, DIKE, EKFA tutti d' uguali altezze. Dunque sì fatti trapezj sono uguali rispettivamente a' rettangoli fatti dalle metà delle somme di AB, FG, di BC, GH, di CD, HI, di DE, IK, di EA, KF, e dall' altezza del trapezio ABGF. E perciò la loro somma, o sia la superficie della piramide troncata ABCDEKFGHI è uguale al rettangolo fatto dalla metà della somma de' perimetri ABCDE, FGHIK, e dall' altezza del trapezio ABGF. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

99. Potendosi un cono retto, troncato da un piano parallelo alla base, considerare senza sensibile errore come una piramide, che

 ha

ha i triangoli laterali d'uguali altezze, troncata pure da un piano parallelo alla base : sarà la superficie d'ogni cono retto, troncato da un piano parallelo alla base, uguale al rettangolo fatto dalla metà della somma della periferia della base, e del perimetro del detto piano, e dalla porzione d'un lato dell'intero cono, che tramezza tra la periferia della base, e 'l perimetro dell' istesso detto piano.

COROLLARIO II.

100. Quindi ciò, che s' è detto de' rettangoli nella Geo. piana, si può applicare alle superficie e delle dette piramidi troncate, e de' detti coni troncati.

AVVERTIMENTO I.

101. Si noti che qualunque sezione fatta in qualsisia cono, parallela alla base, è sempre un cerchio. In fatti contrassegni ABO qualunque cono, il quale venghi tagliato dal piano DC parallelo alla base AB. S' intendano tirati tre lati qualunque OA, OE, OB. Dal centro P della base a' punti A, E, B della sua periferia si tirino i raggi PA, PE, PB; e dal punto Q, in cui l' asse OP incontra la sezione DC, a' punti D, F, C, ove i detti lati incontrano il perimetro della medesima sezione, si tirino le rette QD, QF,

Fig. 23.

QF, QC. Saranno le rette QD, QF, QC rispettivamente parallele a PA, PE, PB (§ 72). Onde le ragioni di PA: QD, di PE: QF, e di PB: QC saranno uguali alla ragione di PO: OQ (§ 299 *del tom.* 2), e perciò uguali tra loro. Dunque QD = QF = QC (§ 244 *del tom.* 2). Similmente si dimostra che ogni altra retta, tirata da Q a qualunque altro punto del perimetro della sezione DC, è uguale a QD. Sicchè la sezione DC è un cerchio (§ 39 *del tom.* 2).

AVVERTIMENTO II.

102. Se la piramide troncata non è della condizione supposta, la sua superficie non si può avere con determinare un solo rettangolo, ma con determinare ciascuno de' trapezj, che la compongono. Se pure il cono troncato non è della condizione supposta, la Geom. non ha ancora somministrata regola alcuna per poterne determinare la sua superficie.

PROP. V. TEOR. V.

103. *Le superficie e semplici, e intere sì de' prismi simili, che delle piramidi simili hanno tra loro una ragione, ch' è duplicata di quella de' lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i prismi ADKG, LOVR simili tra loro: Saranno i piani, che terminano l'uno, simili rispettivamente a' piani, che terminano l' altro. Onde saranno le ragioni di AB: LM, di BC: MN, di CD: NO, di DE: OP, e di EA : PL tutte uguali tra loro (§ 295 *del tom.* 2); e conseguentemente uguali tra loro saranno anche le loro duplicate (§ 270 *del tom.* 2). Perciò uguali pure tra loro saranno le ragioni di AH : LS, di BI: MT, di CK: NV, di DF: OQ, di AF: LQ, di AD: LO, e di GK: RV. Per la qual cosa la ragione delle superficie sì semplici, che intere de' prismi ADKG, LOVR è uguale alla ragione delle basi AD, LO (§ 288 *del tom.* 2), e conseguentemente è duplicata della ragione de' lati omologhi AB, LM (§ 332 *del tom.* 2). Dell' istesso modo si dimostra essere la ragione delle superficie sì semplici, che intere delle piramidi simili duplicata di quella de' lati omologhi. Sicchè le superficie e semplici, e intere, ec.. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

Fig. 24.

PROP. VI. TEOR. VI.

104. *Le superficie e semplici, e intere sì de' cilindri simili, che de' coni simili hanno tra*

tra loro una ragione, ch' è duplicata di quella de' raggi delle basi.

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i cilindri ABCD, EFGH simili. Fig.25. S' intenda l' uno posto entro dell' altro in modo, che O sia centro comune delle loro basi, e che s' unifcano le basi ELF, AIB in un piano, e gli assi OQ, OP in una retta. Per l' asse OP s'intendano passare due piani AOPD, IOPK tali, che l' angolo AOI sia infinitamente picciolo per rispetto a quattro retti. Si potranno senza errore sensibile prendere gli archetti infinitamente piccioli AI, DK, EL, HM per linee rette (§ 345 *del tom.* 2). Essendo AD, IK uguali, e parallele a OP (§ 30), uguali, e parallele saranno anche AD, IK (§58). E perciò AIKD si può prendere per uno de' parallelogrammi infinitamente piccioli, componenti la superficie del cilindro ABCD. Similmente ELMH si può prendere per uno de' parallelogrammi infinitamente piccioli, componenti la superficie del cilindro EFGH. In oltre le rette IK, LM, come parallele a OP, sono tra loro parallele (§ 84 *del tom.* 2); e parallele tra loro sono anche IA, LE, per la simiglianza de' triangoli isosceli AOI, EOL. Dunque gli angoli AIK, ELM sono tra loro uguali (§59). Di più OP: OQ = OI: OL (§32); e per-

ciò IK: LM = OI: OL = IA: LE. Sicchè i parallelogrammi AIKD, ELMH sono simili (§ 306 *del tom.* 2). E perciò la ragione di sì fatti parallelogrammi AIKD, ELMH è duplicata di quella di AI : EL (§ 332 *del tom.* 2), e conseguentemente di quella de' raggi AO, EO. Dell' istesso modo si può dimostrare essere le ragioni, che hanno tutti gli altri parallelogrammi infinitamente piccioli, componenti la superficie del cilindro ABCD, ai loro corrispondenti parallelogrammi infinitamente piccioli, che compongono la superficie del cilindro EFGH, duplicate della ragione de' raggi delle basi AB, EF. Dunque le superficie de' cilindri ABCD, EFGH sono tra loro in duplicata ragione de' raggi delle basi AB, EF (§ 288 del *tom.* 2). Di più sì i cerchi AB, EF, che i cerchi DC, HG sono in duplicata ragione pure de' loro raggi (§ 346 *del tom.* 2). Dunque anche le superficie intere de' cilindri ABCD, EFGH sono in duplicata ragione de' raggi delle loro basi. Con simile raziocinio si dimostra essere le superficie sì semplici, che intere de' coni simili in duplicata ragione de' raggi delle basi. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP.

CAP. II.

Delle proprietà fondamentali de' Parallelepipedi, e de' caratteri principali da conoscere la loro uguaglianza.

PROP. VII. TEOR. VII.

105. *Tutt' i sei piani, che terminano qualunque parallelepipedo sono parallelogrammi, e gli opposti sono tra loro uguali, e simili.*

DIMOSTRAZIONE.

Contrassegni AH qualunque parallelepipedo. Saranno paralleli sì i piani AC, FH, che FB, EC (§ 22). Onde, venendo sì fatti piani tagliati dal piano AE, saranno parallele sì AD, FE, che AF, DE (§ 72). E perciò AE è un parallelogrammo. Similmente si dimostra essere parallelogrammi AC, CG, FH, FB, EC. In oltre, essendo parallele sì AD, FE, che DC, EH, sarà l' angolo ADC = FEH (59). Sono di più AD = EF, e DC = EH (§ 104 *del tom* 2), e conseguentemente AD : DC = FE : EH. Dunque i parallelogrammi Fig. 26.

BD, EG ſono ſimili (§ 306 *del tom.* 2), e conſeguentemente uguali, perchè hanno i lati omologhi uguali. Dell' iſteſſo modo ſi può dimoſtrare eſſere uguali, e ſimili tra loro e i parallelogrammi AE, BH, e FB, EC. Sicchè tutt' i ſei piani, che terminano, ec. Ch' è ciò, che biſognava dimoſtrare.

COROLLARIO I.

106. Quindi, ſe un parallelepipedo è tagliato da un piano parallelo a uno de' ſuoi parallelogrammi, che lo terminano, la ſezione, che naſce, è anch' ella un parallelogrammo uguale, e ſimile a quello, a cui è parallelo.

AVVERTIMENTO.

107. S' intenda il parallelepido AH diviſo da più ſezioni, parallele tutte ai parallelogrammi AE, BH; s' intenderà il parallelepipedo AH diviſo in altrettanti parallelepipedi minori, quanti ne dinoterà il numero delle parti, nelle quali AB s' intenderà diviſa dalle dette ſezioni. S' intenda in oltre diviſo l' iſteſſo parallelepipedo AH da più altre ſezioni, parallele tutte ai parallelogrammi BD, EG; s' intenderà diviſo ciaſcuno de' detti parallelepipedi minori in altrettanti altri più piccioli, quanti ne dinoterà il numero delle parti, nelle quali AF

s'in-

s' intenderà divisa dalle nuove supposte sezioni. S' intenda finalmente diviso il medesimo parallelepipedo AH da più altre sezioni, parallele tutte ai parallelogrammi AG, DH; s' intenderà diviso ciascuno degli anzidetti più piccioli parallelepipedi in altrettanti altri di maggiore picciolezza, quanti ne dinoterà il numero delle parti, nelle quali AD s' intenderà divisa dalle dette ultime sezioni.

COROLLARIO II.

108. Sicchè se s'intende diviso qualunque parallelepipedo AH da più sezioni, parallele altre a AE, BH, altre a BD, EG, e altre a AG, DH; s'intenderà diviso il parallelepipedo AH in altrettanti parallelepipedi minori, quanti ne dinoterà il prodotto de' numeri delle parti, nelle quali dalle medesime sezioni s' intenderanno divise le rette AB, AF, AD.

COROLLARIO III.

109. Se AH sarà parallelepipedo rettangolo, e le parti, nelle quali s' intenderanno divise AB, AF, AD saranno uguali; i detti piccioli parallelepipedi, ne' quali s' intenderà diviso AH, saranno cubi, e cubi tutti uguali (§ 51), li quali si diranno palmi cubici, piedi cubici, canne cubiche ec., se-

fecondochè i loro lati faranno d' un palmo, d'un piede, d'una canna, ec. di lunghezza; e 'l numero di sì fatti cubi uguali farà difegnato dal prodotto, che s'avrà, moltiplicando infieme i numeri delle parti uguali, nelle quali s'intenderanno divife AB, AF, AD.

COROLLARIO IV.

110. Per la qual cofa ogni parallelepipedo rettangolo cofta fempre di tanti palmi cubici, o piedi cubici, o canne cubiche, ec., quanti ne dinota il prodotto, che nafce, moltiplicando infieme i numeri de' palmi, de' piedi, delle canne, ec. di lunghezza, che fono nella fua lunghezza, nella fua larghezza, e nella fua profondità; e confeguentemente ogni cubo cofta di tanti palmi cubici, o piedi cubici, o canne cubiche, ec., quanti ne dinota il cubo del numero de' palmi, de' piedi, delle canne, ec. di lunghezza, che fono nel fuo lato.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

111. *Ogni parallelepipedo viene divifo da un piano, che paffa per le corrifpondenti diagonali di due de' fuoi parallelogrammi oppofti in due prifmi triangolari uguali.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Contrassegni. AH qualunque parallelepipedo, e ne' piani opposti AC, FH si tirino le diagonali AC, FH. Essendo a DE uguale, e parallela sì AF, che HC, saranno AF, HC uguali e parallele tra loro (§ 58); e conseguentemente il piano AFHC, che passa per AC, FH, è parallelogrammo. In oltre, essendo uguali, e parallele tra loro e AD, FE, e DC, EH, e AC, FH, saranno i triangoli ADC, FEH paralleli, uguali, e simili tra loro. Similmente si dimostra essere i triangoli ABC, FGH paralleli, uguali, e simili pure tra loro. Dunque i due solidi ADCHEF, ABCHGF, ne' quali il parallelepipedo AH è diviso dal piano ACHF, sono prismi triangolari (§ 20). Hanno di più tali prismi uguali, e simili tra loro e i due triangoli ADC, ABC, e i due triangoli FEH, FGH, e i due parallelogrammi AE, BH, e i due parallelogrammi DH, AG (§ 105), e hanno di comune il parallelogrammo ACHF. Sicchè sì fatti prismi sono uguali tra loro (§51). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. IX. TEOR. IX.

112. *I parallelepipedi AH, AK, che hanno la medesima base AC, e che sono racchiu-* Fig. 27.

si

si tra i medesimi piani paralleli AC, FK, e tra i medesimi piani laterali BGKC, AFLD, sono tra loro uguali.

DIMOSTRAZIONE.

Essendo a BC uguale sì GH, che IK, sarà GH = IK; onde GI = HK. Similmente è FM = EL. E perciò i parallelogrammi FI, EK sono uguali e simili. In oltre i tre lati BG, GI, IB sono paralleli, e uguali rispettivamente a AF, FM, MA. Dunque i triangoli BGI, AFM sono paralleli, uguali, e simili tra loro. Dell'istesso modo si dimostra essere i triangoli CHK, DEL pure tra loro paralleli, uguali, e simili. Sicchè i solidi BGIMFA, CHKLED sono prismi triangolari (§ 20), e prismi uguali; perchè uguali, e simili sono e i triangoli BGI, CHK, e i triangoli AFM, DEL, e i parallelogrammi FI, EK, e i parallelogrammi BF, CE, e i parallelogrammi BM, CL. Or se da sì fatti prismi se ne toglie il comune solido HEMION, e a' residui s'aggiugne di comune il solido ABCDNO, s'avrà il parallelepipedo AH uguale al parallelepipedo AK. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP X. TEOR. X.

Fig.28. 113. *I parallelepipedi ACEG, ACIL, che han-*

hanno la medesima base AC, e che sono tra i medesimi piani paralleli, ma non già tra i medesimi piani laterali, sono pure uguali tra loro.

DIMOSTRAZIONE.

Si prolunghino MI in N, FE in P, e LK, GN, finchè s' uniscano in O; e si congiungano AQ, BN, CO, DP. Essendo paralleli tra loro e i piani ABNQ, CDPO, e i piani ADPQ, BCON, e i piani ABCD, NOPQ; sarà ACNP un parallelepipedo (§ 22). Or avendo i tre parallelepipedi ACEG, ACIL, ACNP la medesima base AC, ed essendo tra i medesimi piani paralleli; ed essendo di più i parallelepipedi ACEG, ACNP tra i medesimi piani laterali BGOC, AFPD, e i parallelepipedi ACIL, ACNP tra i medesimi piani laterali ABNM, DCOL; sarà al parallelepipedo ACNP uguale sì ACEG, che ACIL (§ *prec.*). Sicchè i parallelepipedi ACEG, ACIL sono uguali tra loro (§ 51 *del tom.* 2). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CAP.

C A P. III.

Delle ragioni, che hanno tra loro e i Parallelepipedi, e i Prismi triangolari.

LEMMA.

Fig. 29. 114. *Sia il parallelepipedo AH tagliato dal piano LN, parallelo a' piani AG, DH. Dico essere i parallelepipedi BL, NE nella ragione delle loro basi AN, MC.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda Y aliquota comune di BN, NC; e s' intendano divise BN, NC nelle parti BI, IK, KN, NP, PC uguali a Y. In oltre pe' punti I, K, P s' intendano tirati i piani IT, KV, PX paralleli al piano AG. Saranno BT, IV, KL, NX, PE parallelepipedi (§22). Or essendo BI, IK, KN, NP, PC uguali, uguali e simili saranno i parallelogrammi BQ, IR, KM, NS, PD. Similmente uguali e simili sono i parallelogrammi AT, QV, RL, MX, SE. Sono anche uguali e simili i parallelogrammi

mi BF, IT, KV, NL, PX (§105). Dunque i sei piani, che terminano uno de' parallelepipedi BT, IV, KL, NX, PE, sono uguali e simili rispettivamente agli sei piani, che terminano ciascuno degli altri. E perciò sì fatti parallelepipedi sono uguali tra loro (§ 51). Per la qual cosa il parallelepipedo BT, e la sua base BQ sono aliquote simili sì del parallelepipedo NE, e della sua base ND, che del parallelepipedo BL, e della sua base BM. E perciò i parallelepipedi BL, NE sono tra loro nella ragione delle basi AN, MC (§ 257 *del tom.* 2). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XI. TEOR. XI.

115. *I parallelepipedi, e i prismi triangolari d'uguali altezze sono tra loro nella ragione delle basi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno BD, LN le basi di due parallelepipedi, e P sia la loro comune altezza. Fig. 3. Si prolunghi prima AB in G, finchè sia BG = LO. Poscia su BG si faccia il parallelogrammo BF simile a LN (§ 336 *del tom.* 2); sarà BF = LN. In oltre si prolunghino i lati EB, FG, DC, finchè s'uniscano in I, e K; e per G si tiri GH pa-

parallela a BC. Finalmente su i parallelogrammi AGHD, EFKI s'intendano formati due parallelepipedi della medesima altezza P; e tali parallelepipedi s'intendano divisi da' piani, procedenti da BC, e BG, e rispettivamente paralleli a' piani de' medesimi parallelepipedi, procedenti da AD, EF.

Essendo i parallelepipedi GCP, BKP, che hanno per base comune il piano, che s'innalza da BG, e che sono racchiusi tra i piani paralleli, che s'innalzano da BG, CK, e tra gli stessi piani laterali, uguali tra loro (§ 112). Sarà il parallelepipedo BDP: BKP = BDP: GCP (§ 262 *del tom.* 2) = BD: GC (§ *prec.*) = BD: BK. Ma il parallelepipedo BKP: BFP = BK: BF (§ *prec.*). Dunque il parallelepipedo BDP: BFP = BD: BF (§ 286 *del tom.* 2). Sono di più i parallelepipedi BFP, LNP uguali pure tra loro; perchè, posti uno entro dell' altro in modo, che la base dell' uno combaccia colla base dell' altro, vengono racchiusi tra piani paralleli. Sicchè il parallelepipedo BDP: LNP = BDP: BFP (§ 262 *del tom.* 2) = BD: BF = BD: LN.

Sieno di più i triangoli ADC, MLO le basi di due prismi triangolari, e P sia la loro comune altezza; saranno sì fatti prismi metà de' parallelepipedi BDP, LNP, e perciò nella ragione di BD: LN, e conseguentemente de' triangoli ADC, MLO. Per la

qual

qual cosa i parallelepipedi, e i prismi triangolari, ec. . Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

116. Quindi tanto i parallelepipedi, quanto i prismi triangolari sono tra loro uguali, se uguali sono e le loro basi, e le loro altezze. E perciò ogni parallelepipedo obbliquangolo è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che nella base, e nell' altezza uguaglia l' obbliquangolo; e ogni prisma triangolare è uguale sempre alla metà d' un parallelepipedo rettangolo, che ha l' altezza uguale a quella del prisma, e la base il doppio della base triangolare del prisma; e conseguentemente è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che nell' altezza, e nella base uguaglia il prisma.

AVVERTIMENTO.

117. Si noti che due prismi triangolari d' uguali altezze possono essere uguali tra loro, ancorchè le loro basi non sieno uguali; e ciò accade, quando per base dell' uno si prende un parallelogrammo, e per base dell' altro un triangolo, ed è la base parallelogramma dell'uno il doppio della base triangolare dell' altro. In fatti abbiano i prismi triangolari ADEFCB, GIHMKL uguali altez- Fig. 31.

tezze, e la base parallelogramma AC del primo sia il doppio della base triangolare GIH dell'altro. S' intenda compito il parallelogrammo IO; e su AC, IO s' intendano formati i parallelepipedi AN, GM delle altezze istesse de' prismi. Saranno sì fatti parallelepipedi uguali tra loro (§*prec.*). E perciò uguali tra loro saranno anche le loro metà, cioè i prismi ADEFCB, GIHMKL.

PROP. XII. TEOR. XII.

118. *I parallelepipedi, e i prismi triangolari di basi uguali, e di altezze disuguali sono tra loro nella ragione delle altezze.*

DIMOSTRAZIONE,

Fig.32. Abbiano i parallelepipedi BH, IQ le basi BD, IL uguali, e le altezze FV, OZ disuguali. Da FV si tagli VX = OZ; e per X s' intenda passare il piano RS parallelo ad AC. Sarà AS = IQ (§116). Onde BH : IQ = BH : AS (§262 *del tom.* 2). Ma BH : AS = DG : DS (§115) = CG : CS = FV : VX = FV : OZ. Dunque BH : IQ = FV : OZ.

In oltre i prismi triangolari ABCGFE, MIKPON sono metà de' parallelepipedi BH, IQ (§111). Sicchè sì fatti prismi sono tra loro nella ragione de' parallelepipedi BH, IQ (§280 *del tom.* 2), e conseguentemen-

te

te nella ragione delle altezze FV, OZ. Per la qual cosa i parallelepipedi, e i prismi triangolari, ec.. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

PROP. XIII. TEOR. XIII.

119. *I parallelepipedi, e i prismi triangolari disuguali e nelle basi, e nelle altezze hanno tra loro una ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i parallelepipedi AH, KN disuguali e nelle basi AC, KM, e nelle altezze FX, PY. S' intenda il parallelepipedo RSTV avere la base RS = KM, e l'altezza VZ = FX. Sarà la ragione di AH : KN composta dalle ragioni di AH : RSTV, e di RSTV : KN (§267 *del tom.* 2). Ma AH : RSTV = AC : RS (§115) = AC : KM, e RSTV : KN = VZ : PY (§118) = FX : PY. Dunque la ragione di AH : KN è composta dalle ragioni di AC : KM, e di FX : PY. Fig. 33.

In oltre i prismi triangolari BADEFG, LKIOPQ sono metà de' parallelepipedi AH, KN. Dunque sì fatti prismi sono tra loro nella ragione de' parallelepipedi AH, KN (§280 *del tom.* 2.), e conseguentemente nella ragione composta da quella di AC:KM,

 e da

e da quella di FX: PY, ovvero da quella del triangolo BAD: LKI, e da quella di FX: PY. Per la qual cosa i parallelepipedi, e i prismi triangolari, ec.. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

120. Se l'angolo solido in A è uguale all'angolo solido in K. Congiunte le rette AX, KY, sarà l'angolo piano FAX=PKY; e perciò sarà il triangolo FAX simile a PKY. Dunque la ragione e de' parallelogrammi AC, KM, e de' triangoli BAD, LKI è composta dalle ragioni di AB:KL, e di AD: KI (§ 325 *del tom. 2*), e la ragione delle altezze FX, PY è uguale a quella de' lati AF, KP. E perciò tanto i parallelepipedi AH, KN, quanto i prismi triangolari BADEFG, LKIOPQ sono tra loro in ragione composta dalle ragioni di AB: KL, di AD: KI, e di AF: KP. Per la qual cosa i parallelepipedi, e i prismi triangolari, che hanno un angolo uguale a un angolo, hanno tra loro una ragione composta dalle ragioni de' lati, che formano gli angoli uguali.

PROP.

PROP. XIV. TEOR. XIV.

121. *I parallelepipedi simili, e i prismi triangolari simili hanno tra loro una ragione, ch' è triplicata di quella de' loro lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno sì i parallelepipedi AH, KN, che i prismi triangolari BADEFG, LKIOPQ simili tra loro. Saranno gli angoli solidi in A e K uguali. Onde la ragione sì de' detti parallelepipedi, che de' detti prismi sarà composta dalle ragioni di AB : KL, di AD: KI, e di AF: KP (§ *prec.*). Ma queste tre ragioni, per la simiglianza de' solidi, sono uguali. Dunque la ragione sì de' detti parallelepipedi, che de' detti prismi è composta da tre ragioni uguali, e perciò è triplicata di quella de' lati omologhi AB, KL (§247 *del tom.* 2). Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

122. Essendo i cubi parallelepipedi tutti simili tra loro, saranno anche i cubi in triplicata ragione de' loro lati. E perciò la triplicata della ragione di due linee è la medesima, che la ragione de' cubi, che hanno per lati l' istesse linee. Quindi s' intende

perchè i Geometri, in vece della ragione triplicata di due linee, adoprano sovente la ragione de' cubi, che hanno per lati le medesime linee.

CAP. IV.

Dell' uguaglianza de' Prismi, delle Piramidi, de' Cilindri, e de' Coni; e della grandezza delle Piramidi relativamente a quella de' Prismi, e de' Coni relativamente a quella de' Cilindri.

PROP. XV. TEOR. XV.

Fig.34. 123. *Se un prisma poligono ADKG, e un prisma triangolare LMNOPQ hanno uguali e le basi, e le altezze, tali prismi sono tra loro uguali.*

DIMOSTRAZIONE.

Si dividano il poligono AD ne' triangoli AEB, BCE, CDE, e 'l poligono GK ne' triangoli FGH, FHI, FIK uguali e simili rispettivamente a' precedenti. Sarà il prisma poligono ADKG diviso ne' prismi trian-

triangolari ABEFGH, BECIFH, ECDKFI. S'intendano in oltre i triangoli LMN, QPO divisi ne' triangoli LMR, RMS, SNM, QPT, TPV, VPO in modo, che i tre primi sieno uguali e simili rispettivamente agli altri tre, e uguali rispettivamente a EAB, EBC, ECD; e s' intendano congiunte le rette RT, SV. Sarà l' intero prisma triangolare diviso ne' prismi triangolari LMRTPQ, RMSVPT, SMNOPV. Or i prismi triangolari ABEFGH, LMRTPQ, per l'uguaglianza delle basi, e delle altezze, sono tra loro uguali (§116); e per la medesima ragione uguali sono i prismi BECIFH, DECIKF a RMSVPT, SMNOPV rispettivamente. Dunque l' intero prisma poligono ADKG è uguale all'intero prisma triangolare LMNOPQ. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

124. Quindi due prismi qualunque sono uguali, se uguali hanno e le basi, e le altezze; e di più ogni prisma poligono è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che nella base, e nell'altezza uguaglia il prisma.

COROLLARIO II.

125. Potendosi ogni cilindro considerare senza errore sensibile come un prisma po-

ligono; ne segue che due cilindri saranno uguali, se uguali avranno e le basi, e le altezze; e ne segue altresì che ogni cilindro è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che nella base, e nell' altezza uguaglia il cilindro.

LEMMA.

126. *Se qualunque piramide viene tagliata da un piano parallelo alla sua base, la sezione, che nasce, è un rettilineo simile alla medesima base.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 22. Sia la piramide ABCDEO tagliata dal piano FGHIK parallelo alla base ABCDE. Saranno FG, GH, HI, IK, KF rispettivamente parallele a AB, BC, CD, DE, EA (§ 72). Onde gli angoli in F, G, H, I, K del rettilineo FGHIK sono rispettivamente uguali agli angoli in A, B, C, D, E della base ABCDE (§ 59); e perciò i rettilinei FGHIK, ABCDE sono equiangoli tra loro. Di più FG : GO = AB : BO, e OG : GH = OB : BC (§ 299 *del tom.* 2). Dunque FG : GH = AB : BC (§ 286 *del tom.* 2). Similmente si dimostra essere gli altri lati delle figure FGHIK, ABCDE, che formano gli angoli uguali, proporzionali. Per la qual cosa la se-

sezione FGHIK è un rettilineo simile alla base ABCDE (§295 *del tom.* 2.) . Ch' è ciò , che bisognava dimostrare .

COROLLARIO I.

127. Si cali dal vertice O sulla base ABCDE la perpendicolare OP , che incontra la sezione FGHIK in Q. Essendo OG : OB = OQ : OP (§ 74) ; sarà anche FG : AB = OQ: OP (§245 *del tom.* 2.). Onde i rettilinei FGHIK, ABCDE , che sono nella ragione de' quadrati di FG, AB (§ 332 *del tom.* 2) , sono pure nella ragione de' quadrati di OQ, OP . E perciò, se in una piramide si formeranno due sezioni parallele alla base , tali sezioni saranno non solamente simili tra loro , ma ben anche nella ragione de' quadrati delle porzioni dell' altezza della piramide, che tramezzano tra 'l suo vertice, e le medesime sezioni.

COROLLARIO II.

128. Quindi se le sezioni saranno infinitamente vicine tra loro ; potendosi in tale caso prendere come uguali senza errore sensibile i quadrati delle dette porzioni dell'altezza, come uguali si potranno anche prendere senza sensibile errore le sezioni istesse. E perciò in sì fatto caso la porzione della piramide, compresa tra le due sezioni , si

può

può ſenza errore ſenſibile prendere per un priſma infinitamente picciolo.

PROP. XVI. TEOR. XVI.

129. *Le piramadi, e i coni, che hanno uguali e le baſi, e le altezze, ſono uguali tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno le due piramidi ABCDEO, LMNRS uguali di baſi, e di altezze. S'intendano sì fatte piramidi diviſe da infiniti piani paralleli alle baſi, e ad uguali diſtanze tra loro, e a diſtanze infinitamente picciole per riſpetto delle altezze dell' iſteſſe piramidi. Sarà ciaſcuna ſezione dell' una alla ſezione corriſpondente dell'altra, come la baſe ABCDE alla baſe LMNR (§ 127). Ma tali baſi per l'ipoteſi ſono uguali. Dunque ciaſcuna ſezione della prima piramide è uguale alla ſezione corriſpondente dell'altra. Onde ciaſcuno de' priſmi infinitamente piccioli, componenti la prima piramide, ſarà uguale al priſma infinitamente picciolo corriſpondente della ſeconda piramide (§124). E perciò l'intera piramide ABCDEO ſarà uguale all'intera piramide LMNRS.

Potendoſi in oltre conſiderare i coni ſenza ſenſibile errore come piramidi poligone, terminate da infiniti triangoli infinitamente pic-

piccioli; saranno anche i coni uguali di basi, e di altezze tra loro uguali. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

PROP. XVII. TEOR. XVII.

130. *Se una piramide triangolare, e un prisma triangolare hanno la medesima base, e la medesima altezza, la piramide è la terza parte del prisma.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda il prisma triangolare ABCDEF Fig. 35. diviso dagli piani AEC, CEF, de' quali il primo passi per le diagonali AE, CE de' parallelogrammi BF, BD, e 'l secondo passi per le diagonali CE, CF de' parallelogrammi BD, AD. E' chiaro che il primo di sì fatti piani divide dal prisma la piramide ABCE, e che l' altro divide il restante del prisma nelle due piramidi CDFE, ACFE uguali tra loro, perchè hanno le basi uguali CDF, CAF, e 'l vertice ambedue in E (§*prec.*). Similmente uguali tra loro sono ACFE, ABCE; perchè si possono considerare come piramidi, che hanno per loro basi i triangoli uguali AEF, ABE, e per loro vertice comune il punto C. Dunque le tre piramidi triangolari, nelle quali viene diviso il prisma da' suddetti piani, sono tra loro uguali. E perciò la pi-

piramide ABCE è la terza parte del prisma ABCDEF della medesima base, e della medesima altezza. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

131. Quindi ogni piramide triangolare è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che ha la base uguale a quella della piramide, e l'altezza un terzo dell' altezza dell' istessa piramide.

PROP. XVIII. TEOR. XVIII.

Fig. 34. 132. *Se una piramide poligona ADH, e un prisma poligono ADKG hanno la medesima base ABCDE, e la medesima altezza, la piramide è pure la terza parte del prisma.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano le basi del prisma divise ne' triangoli uguali, e simili rispettivamente, ne' quali si possono dividere, cioè ne'triangoli ABE, BCE, CDE, GHF, HIF, IKF. Resterà il prisma poligono diviso ne' prismi triangolari ABEFGH, BECIFH, CDEFKI, e la piramide poligona divisa nelle piramidi triangolari ABEH, BECH, CDEH. Ora, essendo ognuna di queste piramidi la terza parte del prisma corrisponden-

te

te (§130), sarà l'intera piramide poligona ADH la terza parte dell' intero prisma poligono ADKG. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

133. Quindi ogni piramide poligona è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che ha la base uguale a quella della piramide, e l'altezza un terzo di quella dell'istessa piramide.

COROLLARIO II.

134. Potendosi considerare senza sensibile errore ogni cilindro come un prisma poligono, e ogni cono come una piramide poligona; sarà pure ogni cono la terza parte del cilindro, co' cui ha egli uguale e la base, e l'altezza. E percio ogni cono è uguale a un parallelepipedo rettangolo, che ha la base uguale a quella del cono, e l'altezza un terzo di quella dell' istesso cono.

AVVERTIMENTO I.

135. Si noti che la grandezza di qualunque piramide troncata ADIF si ha dalla differenza delle grandezze delle due piramidi ADO, FIO; supposto essere ADO l'intera piramide, e FIQ la parte mancante. Fig.22.

Or

Or di sì fatte piramidi vi sono le basi, e mancano le altezze; però le altezze a questo modo si possono determinare. I. Sia il piano FI parallelo alla base AD; e s' intenda essere OP l'altezza dell'intera piramide, che incontri il piano FI in Q. Essendo AB, e FG parallele, sarà la differenza delle rette AB, FG ad FG, come BG : GO = PQ : QO (§ 74). Sicchè la quarta proporzionale ritrovata in ordine alla differenza de' lati omologhi AB, FG, al lato FG, e all'altezza PQ della piramide troncata, dà l'altezza della parte mancante; e, aggiunta all'altezza PQ, dà anche l'altezza dell'intera piramide. II. Sia il piano FI con qualunque inclinazione per rispetto della base AD. Per B si tiri nel trapezio ABGF una parallela a FG. Sarà la differenza di sì fatte parallele ad FG, come BG : GO. Dunque, prolungando BG in O, finchè sia GO quarta proporzionale in ordine alla differenza delle due dette parallele, al lato FG, e al lato BG, si ha il vertice O delle due piramidi. Or, se da O si calino su FI, e AD le perpendicolari, si avranno le altezze della parte mancante, e dell'intera piramide.

AVVERTIMENTO II.

Fig. 23. 136. Similmente qualunque cono tronca-

to

to ABCD, qualora il piano DC è parallelo alla base AB, si ha dalla differenza de' due coni ABO, DCO, supposto anche che ABO sia l' intero cono, e DCO la parte mancante. Intanto di sì fatti coni vi sono pure le basi, ma non le altezze; però le altezze si possono a questo modo determinare. S' intendano essere OP l' asse, e OT l' altezza dell' intero cono, che incontrino il piano DC in Q e R; e s' intenda di più passare per l' asse OP il piano AOP, che intersechi i piani AB, DC in AP, DQ. Essendo AP, e DQ parallele (§ 72); sarà la differenza de' raggi AP, DQ al raggio DQ, come PQ: QO (§ 299 *del tom. 2.*) = TR : RO (§ 74). Sicchè se in ordine alla differenza de' raggi AP, DQ, al raggio DQ, e all' altezza TR del cono troncato si trova la quarta proporzionale, sarà sì fatta quarta proporzionale l' altezza della parte mancante DCO; e, aggiunta a TR, darà anche l' altezza dell' intero cono ABO.

CAP.

CAP. V.

Delle ragioni, che hanno tra loro e i Prismi, e le Piramidi, e i Cilindri, e i Coni.

PROP. XIX. TEOR. XIX.

137. *I prismi, le piramidi, i cilindri, e i coni sono tra loro in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze.*

DIMOSTRAZIONE.

S'è dimostrato che i prismi, e i cilindri uguagliano i parallelepipedi rettangoli, che hanno con essi uguali e le basi, e le altezze; e che le piramidi, e i coni uguagliano pure i parallelepipedi rettangoli, che l'uguagliano nelle basi, e hanno le altezze un terzo delle loro altezze. Dunque, essendo i parallelepipedi tra loro in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze (§ 119); i prismi, le piramidi, i cilindri, e i coni saranno pure tra loro in ragione composta da quella delle basi, e da quella delle altezze. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

138. Sicchè se due prismi, o due piramidi, o due cilindri, o due coni avranno le altezze uguali, saranno tra loro nella ragione delle basi; e, se avranno uguali le basi, saranno nella ragione delle altezze.

COROLLARIO II.

139. Sia la ragione di P : Q composta dalle ragioni di A : B, e di C : D; sarà P : Q = A$\times$C : B$\times$D (§138 *del tom* 1). Onde, se sarà P = Q, sarà anche A$\times$C = B$\times$D, e conseguentemente A : B = D : C (§122 *del tom.*3); e, se sarà A : B = D : C, sarà pure A$\times$C = B$\times$D, e conseguentemente P = Q. Dunque se una ragione è composta da due, è ella d'uguaglianza, se una delle componenti è reciproca dell'altra; e, se è d'uguaglianza, una delle componenti deve essere reciproca dell'altra. Per la qual cosa se due prismi, o due piramidi, o due cilindri, o due coni sono uguali, la ragione delle loro basi è reciproca di quella delle altezze; e, se la ragione delle basi è reciproca di quella delle altezze, i detti solidi sono tra loro uguali.

COROLLARIO III.

140. In oltre se due cilindri retti hanno uguali superficie, la ragione de' loro lati è reciproca di quella delle periferie, o de'diametri delle loro basi (§346). E perciò la ragione de' detti cilindri è composta dalla duplicata de' diametri delle basi, e dalla reciproca de' medesimi diametri; onde è uguale alla ragione de' diametri delle basi, e conseguentemente uguale alla reciproca de' loro lati.

COROLLARIO IV.

141. Quindi se una carta, o un panno lino, ec. della forma d'un rettangolo si pieghi in modo, che ne nasca un cilindro cavo; la grandezza di tale cilindro, se saranno congiunte insieme le larghezze del rettangolo, sarà alla grandezza, che avrà, se saranno insieme congiunte le lunghezze dell' istesso rettangolo, come la lunghezza del medesimo rettangolo alla larghezza. Onde, se la lunghezza del rettangolo sarà alla larghezza nella ragione di 10: 1, la grandezza del cilindro nel primo caso sarà alla grandezza del cilindro nel secondo caso pure come 10: 1.

CO-

COROLLARIO V.

142. Essendo di più la superficie d'un cilindro retto alla sua base, come il lato alla quarta parte del diametro della base (§87); sarà ogni cilindro retto uguale a un' altro, che abbia per base la sua superficie, e per altezza la quarta parte del diametro della sua base (§139). Onde due cilindri retti uguali avranno le loro superficie in ragione reciproca de' diametri delle basi, e conseguentemente, essendo per l'uguaglianza de' cilindri i quadrati de' diametri in ragione reciproca de' lati, in ragione diretta delle radici quadrate de' medesimi loro lati.

COROLLARIO VI.

143. Quindi se più cilindri retti uguali hanno le loro altezze nella ragione de' numeri 1, 4, 9, 16, 25, ec., le loro superficie saranno come i numeri 1, 2, 3, 4, 5, ec..

PROP. XX. TEOR. XX.

144. *I prismi simili, e le piramidi simili hanno tra loro una ragione, ch' è triplicata di quella de' loro lati omologhi.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 24. Sieno i prifmi ADKG, LOVR fimili tra loro, e le piramidi ADH, LOS fimili pure tra loro. Dagli punti H e S fi calino fulle bafi AD, LO le perpendicolari HX, SY, e fi congiungano le rette BX, MY. Effendo gli angoli folidi in B e M uguali, uguali faranno gli angoli piani HBX, SMY; e perciò HX : SY = HB :: SM (§ 299 *del tom.* 2). Onde la ragione de' detti prifmi, o delle dette piramidi è compofta dalla ragione delle bafi AD, LO, e dalla ragione delle altezze HX, SY, ovvero dalla ragione delle bafi AD, LO, e dalla ragione de' lati HB, SM. Ma, per la fimiglianza de' folidi, la ragione delle bafi AD, LO è duplicata di quella de' lati omologhi BC, MN (§ 332 *del tom.* 2); e la ragione di HB : SM è uguale alla ragione di BC : MN. Sicchè la ragione de' prifmi fimili, e delle piramidi fimili è triplicata di quella de' loro lati omologhi BC, MN. Ch'è ciò, che bifognava dimoftrare.

PROP. XXI. TEOR. XXI.

145. *I cilindri fimili, e i coni fimili hanno tra loro una ragione, ch' è triplicata di quella de' diametri delle loro bafi.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sieno i cilindri AC, EG simili tra loro, Fig 36. e simili tra loro i coni ABO, EFS. Dagli punti O e S s'intendano calate sulle basi AB, EF le perpendicolari OQ, ST; e per gli punti Q e T s' intendano tirati i diametri AB, EF. Essendo gli angoli OPQ, SRT uguali (§ 27, e 32); sarà QO: TS = OP: SR (§299 *del tom.* 2). Dunque la ragione de' detti cilindri, e de' detti coni è composta dalla ragione delle basi AB, EF, e dalla ragione degli assi PO, RS (§137). Ma la ragione delle basi AB, EF è duplicata di quella de' diametri AB, EF (§346 *del tom.* 2); e la ragione degli assi PO, RS è uguale a quella de' medesimi diametri AB, EF (§27, e 32). Sicchè la ragione de' cilindri simili, e de' coni simili è triplicata di quella de' diametri delle loro basi. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO I.

146. Sia ABCD qualunque rombo, i cui Fig. 37. lati AB, CB, CD, AD sieno ad arbitrio prolungati in E, H, G, F, purchè sieno BE, BH, DG, DF tutte uguali tra loro. Co' centri A, D, C, B si descrivano gli archi circolari EF, FG, GH, HE. S'avrà la figura PRQS, terminata da una curva

continuata, ma composta da archi di cerchi diversi, detta comunemente l'*Ovale*. Sopra sì fatte ovali si possono intendere formati e cilindri, e coni sì retti, che obbliqui; e a sì fatti cilindri, e coni si può applicare quanto s'è dimostrato fin qui de' cilindri, e de' coni formati sopra cerchi; potendosi considerare i cilindri come prismi poligoni, terminati da infiniti parallelogrammi, e i coni come piramidi poligone, terminate da infiniti triangoli.

AVVERTIMENTO II.

147. Si noti che l'ovale descritta col rombo ABCD può all'infinito variare, e col variare gli angoli del rombo, e col variare la lunghezza delle rette uguali BE, BH, DG, DF. Però in tutti gli casi la somma de' gradi degli quattro archi EF, FG, GH, HE uguaglia sempre la somma de' gradi de' quattro angoli del rombo, e conseguentemente è sempre 360. In oltre, prolungando i diametri AC, BD del rombo, si hanno le rette PQ, RS, che si dicono gli assi dell'ovale; e tali assi non solamente si dividono entrambi in parti uguali in O, ma dividono in quattro parti uguali e l'ovale, e 'l suo perimetro. Di più degli assi uno sempre è maggiore dell'altro. Imperocchè essendo la somma di AO, OB maggiore di AB; aggiuntevi rispettivamente

te le porzioni uguali BQ, BE, sarà la somma di AO, OQ maggiore di AE, o di AR. Onde OQ è anche maggiore di OR, e conseguentemente PQ maggiore di SR.

AVVERTIMENTO III.

148. Si noti finalmente che, se si vuole descrivere un'ovale, che abbia FQ per asse maggiore, e SR per asse minore, si può procedere a questo modo. I. Si prenda ad arbitrio PD, purchè sia minore di RO; e da RO si tagli RI = PD. II. Congiunta ID, si faccia in D l'angolo IDA = DIA; e, tagliate OC = OA, e OB = OD, si congiungano AB, BC, CD, DA. III. Finalmente si descrivano gli archi GF, HE co' centri D e B, e cogl'intervalli uguali DP, BQ, e gli archi FE, HG co' centri A e C, e cogl'intervalli uguali AR, CS; s'avrà in tal modo l'ovale cercata. Imperciocchè, essendo AI = AD, e IR = DP = DF, sarà AR = AF; onde l'arco descritto col centro A, e coll'intervallo AR s'unisce cogli archi GF, EH ne' punti F, ed E. Similmente si dimostra che l'arco descritto col centro C, e coll'intervallo CS s'unisce cogli medesimi archi GF, HE ne' punti G, e H. Per la qual cosa la figura descritta è l'ovale cercata.

Fine del secondo Libro.

LIRBO III.

Della teorica della Sfera, che alla Geometria Solida appartiene.

CAP. I.

Si premettono più proposizioni, che in alcune teoriche della Sfera abbisognano.

DEFINIZIONE I.

149. Di tutti gl' infiniti cerchi, che possono nascere in una sfera, facendo in lei infinite diverse sezioni, i più grandi si dicono *cerchi massimi*, e tutti gli altri si dicono *cerchi minori*.

DEFINIZIONE II.

150. Si dice *Triangolo sferico* ogni porzione di superficie sferica, terminata da tre archi

chi di cerchi, che appartengono alla sfera, della cui superficie il triangolo è parte.

PROP. I. TEOR. I.

151. *Ogni sezione fatta in qualunque sfera è un cerchio, il cui centro è o il centro della sfera, o un' altro punto del diametro della sfera, ch' è perpendicolare all' istessa sezione.*

DIMOSTRAZIONE.

I. Contrassegni ACBE una sfera; e CE sia una delle sue sezioni, che passano pel centro O. Essendo il perimetro della sezione CE nella superficie della sfera, saranno tutt' i suoi punti ugualmente distanti dal centro O (§ 35). Onde la sezione CE è un cerchio, che ha per centro il centro O della sfera. Fig. 38.

II. Contrassegni LN qualunque sezione, che non passa pel centro O. S' intenda da O calata OP perpendicolare alla sezione LN; e, presi nel perimetro della sezione LN due punti L e M ad arbitrio, s'intendano congiunte sì le rette PL, PM, che i raggi della sfera OL, OM. Essendo i quadrati di OL, OM uguali (§116 *del tom. 2*); sarà la somma de' quadrati di OP, PL uguale alla somma de' quadrati di OP, PM. Onde i quadrati di PL, PM sono tra loro uguali, e conseguentemente PL = PM

PM (§116 *del tom.* 2). Similmente si dimostra che tutte le infinite altre rette, che si possono tirare da P agli altri infiniti punti del perimetro della sezione LN, sono uguali a PL. Dunque la sezione LN è un cerchio, il cui centro P è nel diametro della sfera, ch'è perpendicolare alla stessa sezione LN. Per la qual cosa ogni sezione fatta in qualunque sfera, ec. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

152. Quindi ogni cerchio che passa pel centro della sfera, ha per diametro il diametro della sfera; ogni altro cerchio poi, che non passa pel centro della sfera, ha per diametro la corda d'una porzione di cerchio, che passa pel centro della sfera, e d'una porzione diversa dal mezzo cerchio. Onde tutt'i cerchi, che passano pel centro della sfera, sono cerchi massimi, e tra loro uguali; tutti gli altri poi sono cerchi minori; de' quali cerchi minori gli ugualmente distanti dal centro della sfera sono uguali, e 'l più vicino al detto centro è sempre maggiore de' più distanti.

COROLLARIO II.

153. Avendo in oltre ogni cerchio massimo d'una sfera per diametro il diametro

tro della sfera: chiaro si è che, se un cerchio massimo della sfera ACBE passa pel punto A della sua superficie, passa pure pel punto B dell'istessa superficie, diametralmente opposto ad A. E perciò se due cerchi massimi di qualunque sfera AGBE s' intersecano in A, s' intersecano anche in B; e conseguentemente hanno per comune sezione un diametro dell'istessa sfera, e s' intersecano in due parti uguali.

COROLLARIO III.

154. Finalmente, essendo OP perpendicolare al cerchio LN, e passando pel suo centro P, formerà ella, prolungata in A, l'altezza della porzione sferica LNA. Sicchè l'altezza di qualunque porzione di sfera è parte del diametro della sfera, che passa pel centro della base della porzione.

PROP. II. TEOR. II.

155. *Se due triangoli sferici ABC, DEF sono terminati da archi di cerchi massimi di sfere uguali, e sono gli archi AB, BC, CA rispettivamente uguali agli archi DE, EF, FD, sono tali triangoli ABC, DEF tra loro uguali.* Fig. 39.

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Si tirino le corde AB, BC, CA, DE, EF, FD. Saranno le tre prime rispettivamente uguali alle altre tre (§164 *del tom.*2). S' intendano in oltre le sfere, delle cui superficie sono parti i triangoli, poste l' una entro dell' altra in modo, che i loro centri s' uniscano in un punto, e che la corda AC combaci con DF; combacieranno ancora le corde AB, BC con DE, EF rispettivamente; e, combaciando i centri de' cerchi massimi delle due sfere, combacieranno pure gli archi AB, BC, CA cogli archi DE, EF, FD rispettivamente. Sicchè i triangoli sferici ABC, DEF combaciano, e conseguentemente sono tra loro uguali (§ 57 *del tom.*2). Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

156. Essendo uguali i triangoli sferici, terminati da archi di cerchi massimi di sfere uguali, e da archi rispettivamente uguali tra loro; uguali saranno pure i triangoli sferici, terminati da archi di cerchi massimi della medesima sfera, e da archi tra loro rispettivamente uguali.

PROP.

PROP. III. TEOR. III.

157. *Sopra un' istesso cerchio non si possono situare due porzioni sferiche simili, e disuguali tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

Se sopra un' istesso cerchio si potessero situare due porzioni sferiche simili, e disuguali; avrebbero tali porzioni la medesima base, e le altezze diverse. Onde altezze disuguali avrebbero uguali ragioni al raggio della loro base comune (§ 40). Ma ciò ripugna (§263 *del tom.* 2), Dunque ripugna ancora che sopra un' istesso cerchio si possono situare due porzioni sferiche simili, e disuguali. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. IV. TEOR. IV.

158. *Le porzioni sferiche simili, che hanno basi uguali, sono uguali tra loro.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda una porzione posta entro dell' altra in modo, che le basi uguali combacino insieme. Combacieranno ancora insieme le medesime porzioni; altrimenti sopra il medesimo cerchio si potrebbero situare due por-

porzioni sferiche simili, e disuguali; il che ripugna (§ *prec.*). E perciò le porzioni sferiche simili, che hanno basi uguali, sono tra loro uguali. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

159. Essendo le mezze sfere tutte porzioni simili; ne segue che le mezze sfere, che hanno basi uguali, sono uguali tra loro. E perciò ogni cerchio massimo di qualsisia sfera, e la sua periferia dividono rispettivamente in due parti uguali e la sfera, e la sua superficie.

C A P. II.

Della grandezza delle superficie delle sfere, e delle porzioni sferiche, e delle ragioni, che hanno sì fatte superficie.

PROP. V. TEOR. V.

160. *La superficie di qualunque sfera è quadrupla del suo cerchio massimo.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Sieno AMB un mezzo cerchio, e Mm un'arco infinitamente picciolo. S'intendano calate dagli punti M, e m ſul diametro AB le perpendicolari MP, mp, e ſu MP la perpendicolare mR, e s' intenda congiunto il raggio OM. Si potranno ſenza errore ſenſibile prendere l'archetto Mm per una retta, le perpendicolari MP, mp per uguali, e 'l trapezietto PMmp per un piccolo rettangolo. S'intenda in oltre il mezzo cerchio AMB girare intorno a AB con una perfetta rivoluzione; s'intenderanno deſcritte la sfera dal mezzo cerchio AMB, la ſua ſuperficie dalla mezza periferia, e un elemento dell' iſteſſa ſuperficie dall' archetto Mm. Or il detto elemento, come ſuperficie del cilindretto deſcritto dal picciolo rettangolo PMmp, è uguale al tettangolo fatto da Mm, e dalla periferia del cerchio, che ha per raggio PM (§ 86). Ma, eſſendo i triangoli MRm, MPO equiangoli, ſta Rm: Mm = PM: MO, o come la periferia del cerchio deſcritto col raggio PM alla periferia del cerchio deſcritto col raggio OM (§ 346 *del tom.* 2). Dunque il rettangolo fatto da Rm, o da Pp, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OM è uguale al rettangolo fatto da Mm, e dalla periferia del cerchio deſcritto col

Fig. 40.

rag-

raggio PM (§ 328 *del tom.* 2), e conseguentemente è uguale al detto elemento della superficie sferica. Coll' istesso raziocinio si dimostra che ogni altro elemento della superficie della sfera, descritto da ogni altro elemento della mezza periferia AMB nella suddetta rivoluzione, è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio, che ha per raggio MO, o sia il raggio della sfera, e dall' elemento del diametro AB, corrispondente all' elemento della mezza periferia AMB. Dunque l' intera superficie della sfera è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo dell' istessa sfera, e dall' intero suo diametro. Or sì fatto rettangolo è il quadruplo del cerchio massimo della sfera (§ 348 *del tom.* 2). Sicchè la superficie di qualunque sfera è il quadruplo del suo cerchio massimo. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

161. Essendo il cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera, il quadruplo del cerchio massimo dell' istessa sfera; sarà la superficie di qualunque sfera uguale al cerchio, che ha per raggio il diametro della sfera. E perciò le superficie delle sfere sono tra loro nella ragione de' quadrati de' loro diametri, o de' loro raggi (§ 346 *del tom.* 2).

COROLLARIO II.

162. Essendo in oltre la superficie sferica, che descrive ogni elemento della periferia AMB uguale al rettangolo fatto dall' elemento corrispondente del diametro AB, e dalla periferia del cerchio massimo: è facile à intendere che, se nella sfera ACBE si faranno due sezioni LN, CE parallele, e AB sarà un diametro perpendicolare a entrambe, saranno le superficie delle porzioni sferiche LAN, CAE uguali ai rettangoli fatti dalla periferia del cerchio massimo, e dalle altezze AP, AO delle medesime porzioni; e sarà la fascia sferica, ò sia la superficie sferica, racchiusa tra le due periferie CE, LN, uguale al rettangolo fatto dall' istessa periferia del cerchio massimo, e dall' altezza OP del solido racchiuso dall' istessa detta fascia. Fig.38.

COROLLARIO III.

163. Quindi le superficie dell' intera sfera ACBE, della porzione LAN, della porzione LBN, e la fascia LNEC sono tra loro nella ragione delle rette AB, AP, PB, PO.

COROLLARIO IV.

164. Essendo di più, tirata la retta AL, la ragione di BA : AP duplicata della ragione di BA : AL, e conseguentemente uguale alla ragione de' cerchi, che hanno per raggi AB, AL; sarà alla ragione de' medesimi cerchi uguale la ragione della superficie dell' intera sfera ACBE alla superficie della porzione sferica LAN. Ma la superficie dell'intera sfera è uguale al cerchio, che ha per raggio AB (§161). Dunque la superficie della porzione sferica LAN è pure uguale al cerchio, che ha per raggio la retta AL. Per la qual cosa la superficie di qualunque porzione sferica è uguale al cerchio, che ha per raggio la retta tirata dal suo vertice a qualunque punto della periferia della sua base.

COROLLARIO V.

165. Di vantaggio il cerchio, il cui raggio è AL, è uguale alla somma de' cerchi, che hanno per raggi LP, PA. Dunque la superficie di qualunque porzione sferica eccede la sua base di quant' è il cerchio, che ha per raggio la sua altezza.

COROLLARIO VI.

166. Di più la superficie di qualunque porzione sferica LAN sarà alla sua base

LN,

LN, come il quadrato di AL al quadrato di LP, o come il rettangolo fatto da AB e AP al rettangolo fatto da BP e AP, o come il diametro AB della sfera all' altezza BP della rimanente porzione.

COROLLARIO VII.

167. Essendo la superficie d' ogni porzione sferica uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo dell'istessa sfera, e dall' altezza della porzione; saranno le superficie di due porzioni qualunque di due sfere diverse in ragione composta da quella de' raggi delle sfere, e da quella delle altezze delle porzioni; e perciò, se le porzioni saranno simili, nel qual caso le altezze vengono proporzionali a' raggi delle sfere, le superficie di tali porzioni saranno come i quadrati delle loro altezze, o de' raggi delle sfere.

COROLLARIO VIII.

168. Finalmente se intorno a qualunque sferà s' intende circoscritto il cilindro retto. Essendo la base di sì fatto cilindro uguale al cerchio massimo della sfera, e l' altezza uguale al diametro dell' istessa sfera; sarà la superficie di cotale cilindro uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio massimo della sfera, e dal diametro dell' istessa

sfera (§ 86), e conseguentemente uguale alla superficie della sfera. E di più, se il detto cilindro s' intende diviso da piani paralleli alla sua base, le superficie delle porzioni cilindriche, come uguali a' rettangoli fatti dalla periferia del cerchio massimo della sfera, e dalle altezze delle istesse porzioni cilindriche, o delle porzioni sferiche corrispondenti, saranno uguali alle superficie delle medesime corrispondenti porzioni sferiche.

CAP. III.

Della grandezza de' triangoli sferici.

PROP. VI. TEOR. VI.

Fig. 40. 169. *Il triangolo sferico CAD, terminato dagli quadranti AC, AD di cerchi massimi della sfera, e dall' arco CD anche di cerchio massimo, è uguale al rettangolo fatto dall' arco CD, e dal raggio della sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Sieno ACB, ADB i mezzi cerchi, delle periferie de' quali gli archi AC, AD sono me-

metà, e O sia il loro centro comune. Si può intendere il triangolo sferico CAD che venghi descritto dall' arco AC, girando il mezzo cerchio ACB intorno ad AB, finchè giunga al sito ADB. Sieno di più Mm una parte infinitamente picciola dell'arco AC, e MP, mp perpendicolari ad AB, e mR perpendicolare a MP. Sia finalmente MN l' arco, che descrive il punto M nel supposto movimento. Si congiungano le rette OC, OD, OM, ON. Essendo PM, PN rispettivamente parallele a OC, OD (§ 72); sarà l'angolo MPN = COD (§ 59), e conseguentemente gli archi MN, CD saranno simili tra loro (§340 *del tom.* 2). Or perchè nel supposto movimento l'archetto Mm descrive una superficietta cilindrica, racchiusa tra l'arco MN, e 'l suo uguale e parallelo, che descrive m; sarà sì fatta superficietta uguale al rettangolo fatto da Mm, e MN. Ma Mm : mR, ovvero Mm : Pp = OM : MP, o come la periferia del cerchio, che ha per raggio OM, alla periferia del cerchio, che ha per raggio MP, ovvero come archi simili de' medesimi cerchi, vale a dire come CD : MN. Dunque il rettangolo fatto da Mm, e MN, o sia la detta superficietta è uguale al rettangolo fatto da CD, e Pp. Similmente si dimostra che ogni altro elemento del triangolo sferico CAD, descritto da ogni altro elemento dell' arco AC, è uguale al rettan-

golo fatto dall' arco CD , e dall' elemento corrifpondente del raggio AO. Sicchè l'intero triangolo sferico CAD è uguale al rettangolo fatto dall' arco CD, e dall' intero raggio AO della sfera. Ch'è ciò , che bifognava dimoftrare.

COROLLARIO I.

170. Effendo il fettore circolare COD uguale al rettangolo fatto da CD , e dalla metà di CO, o di OA (§349 *del tom.2.*); farà il triangolo sferico CAD il doppio del fettore circolare COD .

COROLLARIO II.

171. In oltre i due triangoli sferici CAD, CBD fono tra loro uguali (§156). Dunque la fuperficie sferica ACBD , racchiufa tra le periferie di due mezzi cerchi maffimi ACB, ADB, è uguale al rettangolo fatto dall'arco CD , ch'è mifura dell'angolo COD d'inclinazione de' medefimi mezzi cerchi, e dal diametro AB della sfera , e confeguentemente è quadrupla del fettore circolare COD.

COROLLARIO III.

172. In oltre, effendo ogni elemento sì del triangolo CAD, che del triangolo CBD, che

che si può intendere descritto da ogni elemento della mezza periferia ACB, uguale al rettangolo fatto dall' arco CD, e dall' elemento corrispondente del diametro AB; saranno il triangolo sferico MAN uguale al rettangolo fatto dall' arco CD, e dalla retta AP; il triangolo sferico MBN uguale al rettangolo fatto dall' istesso arco CD, e dalla retta PB; e 'l quadrilineo sferico CMND uguale al rettangolo fatto dal medesimo arco CD, e dalla retta PO. Per la qual cosa le dette superficie sferiche saranno tra loro nella ragione delle rette AP, PB, PO.

PROP. VII. TEOR. VII.

173. *Sia ABC un triangolo sferico, fatto da tre archi di cerchi massimi d' un' istessa sfera, de' quali uno, o niuno sia quadrante. Dico che sì fatto triangolo è uguale al rettangolo fatto dal raggio della sfera, e dall' arco di cerchio massimo, che misura la somma delle tre inclinazioni de' tre cerchi, delle cui periferie gli archi AB, BC, CA sono porzioni, toltone un cerchio massimo dell' istessa sfera.* Fig. 41.

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano essere ABDE, BCEF, ACDF i cerchi interi, delle cui periferie gli ar-

archi AB, BC, CA sono porzioni; e s'intenda formata sul cerchio ABDE la mezza sfera. Sarà la superficie di sì fatta mezza sfera uguale alla somma delle sue parti comprese, una tra le mezze periferie ABD, ACD, l'altra tra gli archi DC, CE, ED, e l'altra tra gli archi AC, CE, EA (§ 59 *del tom. 2*). Ma, essendo le mezze periferie DCA, ECB, EDB uguali alle mezze periferie CAF, CBF, DBA, saranno i tre archi DC, CE, ED rispettivamente uguali agli tre AF, FB, AB. E perciò i triangoli sferici DCE, BFA sono tra loro uguali (§156). Sicchè la superficie della detta mezza sfera è uguale alla somma delle superficie sferiche comprese, una tra le mezze periferie ABD, ACD, l'altra tra gli archi AC, CE, EA, e l'altra tra gli archi BF, FA, AB. S'aggiunga di comune il doppio del triangolo sferico ABC; sarà la superficie della mezza sfera, una col doppio del triangolo sferico ABC uguale alla somma delle superficie comprese, una tra le mezze periferie ABD, ACD, l'altra tra le mezze periferie BCE, BAE, e l'altra tra le mezze periferie CBF, CAF. E perciò il triangolo sferico ABC è uguale al rettangolo fatto dal raggio della sfera, e dall'arco di cerchio massimo, che misura la somma delle inclinazioni de' tre cerchi, delle cui periferie gli archi AB, BC, CA sono porzioni, toltane la metà della superfi-

ficie della mezza sfera, ovvero toltone un cerchio massimo della medesima sfera. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

174. Quindi se si vorrà la superficie sferica, racchiusa tra l'arco ABC di cerchio massimo, e tra l'arco ADC di cerchio minore dell'istessa sfera; si dovrà prima ritrovare il vertice F della porzione sferica, che ha per base il cerchio, della cui periferia l'arco ADC è porzione; poscia si dovranno far passare due cerchi massimi, uno per gli punti A, e F, e l'altro per gli punti C, e F, delle periferie de' quali gli archi AF, FC sieno porzioni; e finalmente si dovrà determinare sì la superficie del triangolo sferico, terminato dagli archi AF, FC, e ADC (§172), che quella del triangolo sferico, terminato dagli archi AF, FC, ABC (§ *prec.*). Imperciocchè la differenza de' due detti triangoli darà la superficie racchiusa tra l' arco ABC di cerchio massimo, e l' arco ADC di cerchio minore. Fig.42.

COROLLARIO II.

175. Se poi si vorrà la superficie sferica racchiusa tra due archi ADC, AEC di cerchi minori dell' istessa sfera. Si farà allora passare per gli punti A e C un cerchio massi-

ſimo, e ſia ABC una porzione della ſua periferia. Determinando e la ſuperficie sferica racchiuſa tra gli archi ABC, ADC, e quella, ch'è racchiuſa tra gli archi ABC, AEC; la differenza di sì fatte ſuperficie darà quella, ch' è racchiuſa tra gli archi ADC, AEC.

COROLLARIO III.

Fig.39. 176. Se finalmente ſi vorrà la grandezza di qualunque altro triangolo sferico ABC, terminato da archi tutti di cerchi minori dell'iſteſſa sfera. Si faranno allora paſſare tre archi di cerchi maſſimi, uno per gli punti A, e B, l'altro per gli punti B, e C, e'l terzo per gli punti A e C. Con determinare il triangolo sferico, terminato da detti archi di cerchi maſſimi (§173), e le ſuperficie sferiche racchiuſe tra gli medeſimi archi, e gli archi AB, BC, CA del triangolo ABC (§ 174), ſi verrà a determinare la grandezza dell' iſteſſo triangolo sferico ABC.

CAP.

CAP. IV.

Della grandezza delle sfere, de' settori sferici, e delle porzioni sferiche; e delle ragioni, che hanno sì fatti solidi.

PROP. VIII. TEOR. VIII.

177. *Ogni sfera è uguale al cono, che ha la base uguale alla di lei superficie, e l' altezza uguale al di lei raggio.*

DIMOSTRAZIONE.

Potendosi senza errore sensibile considerare la superficie d' ogni sfera composta da infinite superficiette cilindriche, e conseguentemente composta da infiniti picciolissimi parallelogrammi; si potrà anche senza sensibile errore considerare ogni sfera composta da infinite picciolissime piramidi, che abbiano per basi i detti picciolissimi parallelogrammi, e 'l vertice comune nel suo centro. Or tutte queste sì fatte infinite piramidette hanno per altezze i raggi della sfera; perchè le basi loro hanno tutt' i loro punti ugualmen-

mente distanti dal centro della sfera. Dunque ogni sfera è uguale a una piramide, o a un cono, che ha la base uguale alla di lei superficie, e l' altezza uguale al di lei raggio. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

178. Quindi le sfere sono tra loro in ragione composta da quella delle loro superficie, e da quella de' loro raggi (§137). Ma la ragione delle superficie è duplicata di quella de' raggi (§161). Dunque la ragione delle sfere è triplicata di quella de' loro raggi, o de' loro diametri.

COROLLARIO II.

179. In oltre ogni sfera è quadrupla del cono, che ha per base il suo cerchio massimo, e per altezza il suo raggio; e conseguentemente ogni mezza sfera è il doppio del cono massimo iscritto in essa.

PROP. IX. TEOR. IX.

180. *Ogni settore sferico è uguale al cono, che ha la base uguale alla sua superficie sferica, e l' altezza uguale al raggio della sfera.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

Potendosi ogni settore sferico considerare senza errore sensibile composto da tante delle dette picciole piramidi, quante ne dinota il numero de' piccioli parallelogrammi, da' quali si può considerare composta la sua superficie sferica; sarà ogni settore sferico uguale al cono, che ha la base uguale alla sua superficie sferica, e l' altezza uguale al raggio della sfera. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

181. Quindi la sfera sta a qualunque suo settore, come la superficie della sfera alla superficie sferica del settore (§138), e conseguentemente come il diametro della sfera all'altezza della porzione sferica contenuta nel settore.

COROLLARIO II.

182. Essendo in oltre la superficie sferica d' un settore di sfera al cerchio massimo dell'istessa sfera, come l'altezza della porzione sferica, contenuta nel settore, alla metà del raggio della sfera, o come il doppio della detta altezza all' intero raggio; sarà il cono, che ha la base uguale alla super-

perficie sferica del settore, e l'altezza uguale al raggio della sfera, o sia il settore sferico uguale al cono, che ha la base uguale al cerchio massimo della sfera, e l' altezza il doppio dell' altezza della porzione sferica contenuta nell' istesso settore. E perciò ogni settore sferico è uguale al cilindro, che ha per base il cerchio massimo della sfera, e per altezza i due terzi dell' altezza della porzione sferica contenuta nel settore.

COROLLARIO III.

183. Onde due settori, appartenenti all'istessa sfera, sono tra loro nella ragione delle altezze delle porzioni sferiche contenute ne' medesimi settori. Due settori poi, appartenenti a sfere diverse, sono tra loro in ragione composta dalla duplicata de' raggi delle sfere, e da quella, che hanno le altezze delle porzioni sferiche contenute ne' settori; e perciò, se i settori sono simili, e conseguentemente simili le porzioni contenute in essi; perchè le altezze delle porzioni in tale caso sono nella ragione de' raggi delle sfere; i settori in tale caso saranno in triplicata ragione de' raggi delle sfere.

PROP. X. TEOR. X.

184. *Ogni porzione sferica è uguale al cilindro, che ha per base il cerchio, il cui raggio*

gio è l'altezza dell' istessa porzione, e per altezza il raggio della sfera, diminuito della terza parte dell' istessa altezza della porzione.

DIMOSTRAZIONE.

Sia LAN una porzione qualunque della sfera ACBE. Sia AP l'altezza di tale porzione, e sia prolungata in B. Sieno di più LANO il settore, che contiene la porzione LAN; e LP un raggio del cerchio LN. Sarà il settore LANO al cono LNO in ragione composta dalla ragione della superficie sferica LAN al cerchio LN, o sia di AB: BP (§166), e da AO: OP (§ 137); e perciò in ragione composta dalla ragione del doppio di AO alla somma di AP, e del doppio di PO, e dalla ragione di AO: OP, e conseguentemente come il doppio del quadrato di AO, o come il doppio de' quadrati di AP, e PO, una col quadruplo del rettangolo fatto da AP, e PO alla somma del rettangolo fatto da AP e PO, e del doppio del quadrato di OP. Onde, dividendo, sarà la porzione sferica LAN al cono LNO, come la somma del doppio del quadrato di AP, e del triplo del rettangolo fatto da AP, e PO alla somma del rettangolo fatto da AP e PO, e del doppio del quadrato di OP (§275 *del tom.* 2). E' in oltre il cono LNO al cono, che ha per base il cerchio descritto col raggio AP,

Fig. 38.

AP, e per altezza l'isteſſa AP, in ragione composta dalla ragione del quadrato di LP al quadrato di AP, o dalla ragione di BP: PA, e dalla ragione di OP: PA, ovvero composta dalla ragione della ſomma di AP, e del doppio di PO ad AP, e dalla ragione di PO: AP, vale a dire in ragione della ſomma del rettangolo fatto da AP e PO, e del doppio del quadrato di PO al quadrato di AP. Sicchè, ordinando, ſarà la porzione sferica LAN al cono, che ha per baſe il cerchio, il cui raggio è AP, e per altezza l'isteſſa AP, come la ſomma del doppio del quadrato di AP, e del triplo del rettangolo fatto da AP e PO al quadrato di AP, o come due terzi di AP una con PO alla terza parte di AP; e conſeguentemente come il cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio AP, e per altezza due terzi di AP una con PO, al cilindro, che ha pure per baſe il cerchio deſcritto col raggio AP, e per altezza un terzo di AP. Ma il ſecondo di sì fatti cilindri è uguale al cono, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio AP, e per altezza l'isteſſa AP (§134). Dunque il cilindro, che ha per baſe il cerchio deſcritto col raggio AP, e per altezza il raggio della sfera, diminuito della terza parte dell' altezza AP della porzione sferica LAN, è uguale all'isteſſa porzione LAN (§244 *del tom.*2). Ch'è ciò, che biſognava dimoſtrare.

CO-

COROLLARIO I.

185. Quindi le porzioni sferiche sono tra loro in ragione composta dalla ragione de' quadrati delle loro altezze, e da quella de' raggi delle sfere, diminuiti delle terze parti delle medesime dette altezze; e perciò, se le porzioni sono simili, nel qual caso sono nella ragione de' raggi delle sfere e le altezze, e conseguentemente i raggi diminuiti delle terze parti delle istesse altezze; sono allora le porzioni in ragione triplicata di quella de' raggi delle sfere, o di quella delle loro altezze.

COROLLARIO II.

186. In oltre, se un settore sferico, e una porzione sferica appartengono sì, o no all' istessa sfera, sarà il settore alla porzione in ragione composta dalla ragione del quadrato del raggio della sfera, a cui appartiene il settore, al quadrato dell' altezza della porzione, e dalla ragione delle due terze parti dell' altezza della porzione, contenuta nel settore, al raggio della sfera, a cui appartiene la porzione, diminuito tale raggio della terza parte dell' altezza della medesima porzione.

COROLLARIO III.

187. Finalmente ogni sfera starà a qualunque sua porzione in ragione composta da quella del quadruplo del quadrato del raggio della sfera al quadrato dell' altezza della porzione, e da quella del terzo del raggio della sfera all' istesso raggio diminuito del terzo dell' altezza della porzione.

AVVERTIMENTO.

188. Si noti che, quanto s' è detto fin qui, fa chiaramente conoscere I. che 'l solido CODA, racchiuso dagli quadranti COA, DOA di cerchi massimi della sfera ACBE, dalla superficie sferica CAD, e dal settore circolare COD, è uguale al cono, che ha la base uguale alla superficie sferica CAD, e l' altezza uguale al raggio AO della sfera, e conseguentemente è il doppio del cono, che ha la base uguale al settore circolare COD, e l'altezza uguale al raggio OA; II. che 'l solido racchiuso dagli mezzi cerchi ACB, ADB, e dalla superficie sferica ACBD è uguale al cono, che ha la base uguale alla detta superficie sferica ACBD, e l' altezza uguale al raggio della sfera, e conseguentemente è il quadruplo del cono, che ha la base uguale al settore circolare COD, e l' altezza uguale al raggio AO;

Fig. 38.

III.

III. che'l solido racchiuso dagli spazj circolari APL, APM, LPM, e dalla superficie sferica LAM è uguale alla differenza de' due coni, che hanno, uno la base uguale alla superficie sferica LAM, e l'altezza uguale al raggio della sfera, l'altro la base uguale al settore circolare LPM, e l' altezza uguale alla perpendicolare OP, calata sul piano LPM dal centro O della sfera; IV. che'l solido sferico racchiuso dal triangolo sferico ABC, fatto da archi di cerchi massimi, e dagli settori AOB, BOC, COA di cerchi massimi, è uguale al cono, che ha la base uguale al triangolo sferico ABC, e l'altezza uguale al raggio della sfera; V. che il solido racchiuso dalla porzione ABC di cerchio massimo, dalla porzione ADC di cerchio minore, e dalla superficie sferica, compresa tra gli archi ABC, ADC, è uguale alla differenza di due coni, che hanno, uno la base uguale alla detta superficie sferica, e l'altezza uguale al raggio della sfera, e l'altro la base uguale alla porzione circolare ADC, e l'altezza uguale al la perpendicolare calata su ADC dal centro della sfera; VI. finalmente che 'l solido sferico, acchiuso dalle porzioni ADC, AEC di cerchi minori, e dalla superficie sferica, compresa tra gli archi ADC, AEC, è uguale al cono, che ha la base uguale alla detta superficie sferica, e l' altezza uguale al raggio della sfera, toltane la differenza di

Fig. 41.

Fig. 42.

H 2 due

due altri, che hanno le basi uguali alle porzioni circolari ADC, AEC, e le altezze uguali rispettivamente alle perpendicolari calate sulle medesime porzioni dal centro della sfera.

CAP. V.

Delle ragioni, che passano tra la sfera, e più corpi intorno a lei circoscritti e per riguardo delle loro superficie, e per riguardo delle loro solidità.

LEMMA.

189. *Se un piano tocca una sfera, la retta, che congiugne il centro della sfera col punto del contatto, è perpendicolare all' istesso piano.*

DIMOSTRAZIONE.

Fig. 43. Tocchi il piano LM la sfera ABC in A. Dal centro O della sfera al punto A si tiri il raggio OA. Se non sarà OA perpendicolare a LM, sarà perpendicolare a LM un'altro raggio prolungato OP. S'unisca la retta PA. Sarà l' angolo OPA retto (§4); onde OAP sarà minore del retto. Per la qual cosa

cosa sarà OA maggiore di OP (§ *96 del tom.* 2) . Il che è impossibile . Dunque OA è perpendicolare al piano LM . Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. XI. TEOR. XI.

190. *Qualunque corpo , terminato da superficie piane , e circoscritto intorno ad una sfera sta alla sfera , come la sua superficie alla superficie della sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda il corpo diviso in quante piramidi si può dividere , intendendo tirate delle rette dal centro della sfera a tutti gli suoi angoli . Avranno sì fatte piramidi tutte per altezze i raggi (§ *prec.*) . Onde l' intero corpo sarà uguale a una piramide , che avrà per base la sua superficie , e per altezza il raggio della sfera . E' anche la sfera uguale a un cono , o a una piramide, che ha per base la sua superficie, e per altezza l' istesso raggio (§117) . Dunque il corpo circoscritto alla sfera sta alla sfera , come la sua superficie alla superficie della sfera (§138) . Ch'è ciò , che bisognava dimostrare .

COROLLARIO.

191. Essendo la superficie del cubo circoscritto a una sfera il sestuplo del quadrato del diametro della sfera; il cubo circoscritto a una sfera starà alla sfera, come il sestuplo del quadrato del diametro della sfera al quadruplo del cerchio massimo, e conseguentemente come $6 : 3 . 141$, come è facile ad avvertire.

PROP. XII. TEOR. XII.

192. *Se un cilindro retto è circoscritto intorno a una sfera; sarà nella ragione di 3 : 2 sì la superficie intera del cilindro alla superficie della sfera, che la solidità del cilindro a quella della sfera.*

DIMOSTRAZIONE.

Imperciocchè la superficie cilindrica del cilindro retto circoscritto intorno alla sfera uguaglia la superficie della sfera, e conseguentemente è quadrupla del cerchio massimo della sfera (§160), o della base dell'istesso cilindro. Dunque la superficie intera di sì fatto cilindro sarà alla superficie della sfera, come il sestuplo del cerchio massimo della sfera al quadruplo dell'istesso cerchio, o come $6 : 4$, ovvero come $3 : 2$.

In

In oltre il cilindro retto circoscritto intorno alla sfera è il triplo del cono dell' istessa base, e dell' istessa altezza (§134), e perciò è il sestuplo del cono, che ha per base il cerchio massimo della sfera, e per altezza il raggio. E' anche di questo cono il quadruplo la sfera (§179). Dunque il cilindro retto circoscritto intorno alla sfera sta alla sfera, come 6: 4, o come 3: 2. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

193. Dunque il cilindro retto circoscritto intorno alla sfera, la sfera, e'l cono retto dell' istessa base, e dell' istessa altezza del cilindro sono tra loro nella ragione di 3, 2, 1. Onde il solido, che resta, togliendo la sfera dal cilindro, è uguale al cono; e così ancora il solido, che resta, togliendo la mezza sfera dal cilindro retto intorno a lei circoscritto è uguale al cono massimo iscritto nell' istessa mezza sfera.

PROP. XIII. TEOR. XIII.

194. *Se intorno a qualunque sfera DEF è circoscritto il cono equilatero ABC, cioè il cono retto, che ha il diametro AB della base, e i lati AC, CB, che formano il triangolo equilatero ABC; sarà il cono alla sfera.* Fig. 44.

ra sì per riguardo delle loro superficie, che per riguardo delle loro solidità nella ragione di 9:4.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda nel cono tirato l' asse PC, che passerà pel centro O della sfera DEF. Sarà OC il raggio del cerchio circoscrittibile intorno al triangolo equilatero ABC; onde sarà OC il doppio di OP, come è facile ad intendere. E' pure AC il doppio di AP. Dunque, essendo il quadrato di AC il triplo del quadrato di OC (§200 *del tom.* 2), sarà il quadrato di AP anche il triplo del quadrato di PO, e conseguentemente il cerchio AB il triplo del cerchio massimo della sfera. Ma la superficie intera del cono ABC è il triplo del cerchio AB (§ 95), e la superficie della sfera è il quadruplo del suo cerchio massimo (§160). Dunque la superficie intera del cono ABC sta alla superficie della sfera DEF nella ragione di 9 : 4.

In oltre il cono ABC sta alla sfera DEF in ragione composta dalla ragione della base AB alla superficie sferica DEF, e dalla ragione di PC : PO (§137). Ma la prima di tali ragioni componenti uguaglia la ragione di 3 : 4, e la seconda uguaglia quella di 3 : 1. Dunque la ragione del cono ABC alla sfera DEF è uguale alla ragione di 9 : 4. Ch'è quanto bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO I.

195. Quindi il cono equilatero circoscritto intorno alla sfera, la sfera, e'l cilindro quadrato circoscritto intorno all'istessa sfera sono tra loro e nelle superficie, e nelle solidità nella ragione di 9, 4, 6. E perciò il cono equilatero, e 'l cilindro quadrato, circoscritti entrambi intorno all'istessa sfera, e nelle superficie, e nelle solidità sono tra loro pure nella ragione di 9: 6, o di 3: 2.

COROLLARIO II.

196. Essendo in oltre il cerchio AB il triplo del cerchio massimo della sfera DEF, e l'altezza FC del cono ABC al diametro PF della sfera, come 3 : 2. Sarà alla ragione di 3 : 2 uguale pure sì la ragione della base del detto cono equilatero alla somma delle basi del detto cilindro quadrato, che la ragione dell' altezza dell' istesso cono all' altezza del medesimo cilindro.

COROLLARIO III.

197. Finalmente, essendo la superficie semplice del cono ABC il doppio della sua base AB (§95), e la superficie cilindrica del cilindro quadrato, circoscritto intorno alla medesima sfera DEF, il doppio della som-

ma delle due ſue baſi. Saranno pure le ſuperficie ſemplici del cono equilatero, e del cilindro quadrato, circoſcritti entrambi intorno alla medeſima sfera, nella ragione di 3 : 2.

Fine del terzo Libro.

LIB.

LIRBO IV.

Delle grandezze delle superficie, e delle solidità di più altri corpi, che occorre spesso nella pratica dover determinare.

CAP. I.

Della grandezza della superficie curva, che si può considerare come descritta da qualunque arco di cerchio, mosso con una perfetta rivoluzione intorno a qualsivoglia retta, diversa dal diametro; e della grandezza del solido, che ha per termine la medesima superficie.

PROP.

PROP. I. TEOR. I.

Fig. 45. *198. Sia AB un arco di cerchio, il cui centro sia O, e CD sia una retta qualunque, che non passa per O. Dagli punti A, B, e O si calino AC, BD, OL perpendicolari a CD. Dico che la superficie curva, che descrive l'arco AB, girando la figura mistilinea ACDB con una perfetta rivoluzione intorno a CD, è uguale alla somma, o alla differenza, secondochè CD cade sotto, o sopra del centro O, de' rettangoli fatti, uno dalla retta CD, e dall' intera periferia, di cui l'arco AB è parte, e l'altro dall' arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL.*

DIMOSTRAZIONE.

Per O si tiri PQ parallela a CD; e da qualunque punto E dell' arco AB si cali EF perpendicolare a CD. S' intendano in oltre tirate GH parallela, e infinitamente vicina a EF, e GI parallela a CD. Finalmente si congiunga OE. Potendosi senza errore sensibile prendere EG per una retta, ed EFHG per un rettangolo; si potrà anche prendere senza sensibile errore il solido, che il detto rettangoletto genera, girando lo spazio ACDB intorno a CD, per un picciolissimo cilindro. Sicchè la superficie, che descrive EG si può prendere uguale al rettan-

tangolo fatto da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio EF (§ 86), e perciò uguale alla somma, o differenza, secondochè CD cade sotto, o sopra del centro O, de' rettangoli fatti, uno da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio EK, e l' altro fatto da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio FK, o OL. Ma, essendo EG: GI, come OE: EK, o come la periferia del cerchio descritto col raggio OE alla periferia del cerchio descritto col raggio EK (§ 346. *del tom.* 2.), il rettangolo fatto da EG e dalla periferia del cerchio descritto col raggio EK uguaglia il rettangolo fatto da GI, o FH, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OE (§328 *del tom.* 2). Dunque la detta superficietta, che descrive EG, è uguale alla somma, o differenza, secondochè CD cade sotto, o sopra di O, de' rettangoli fatti, uno da FH, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OE, e l'altro fatto da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL. Dell' istesso modo si dimostra essere la picciola superficie, che descrive nella suddetta rivoluzione ogni altro elemento dell' arco AB, uguale al rettangolo fatto dall' elemento corrispondente di CD, e dall' intera periferia, di cui l'arco AB è parte, aggiuntovi, o toltovi, secondochè CD cade sotto o sopra di O, il rettangolo fatto dall' elemen-

mento dell' arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL. Per la qual cosa l' intera superficie curva, che descrive l' arco AB, girando la figura mistilinea ACDB intorno a CD con una perfetta rivoluzione, è uguale alla somma, o differenza, secondochè CD cade sotto, o sopra di O, de' rettangoli fatti, uno da CD, e dall' intera periferia, di cui l' arco AB è parte, e l' altro dall' arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

199. Essendo, compito il mezzo cerchio PABQ, la fascia sferica, che descriverebbe l' arco AB, se il mezzo cerchio PABQ girasse intorno a PQ, uguale al rettangolo fatto da XY, o da CD, e dall' intera periferia, di cui l' arco AB è parte (§162). Sarà la superficie, che descrive l' arco AB, girando la figura CABD intorno a CD, uguale alla fascia sferica, che descriverebbe l' istesso arco AB, se il mezzo cerchio PABQ girasse intorno a PQ, aggiuntovi, o toltovi, secondochè CD cade sotto, o sopra il centro O, la superficie del cilindro retto, che ha per base il cerchio descritto col raggio OL, e per altezza una retta uguale all' arco AB.

PROP,

PROP. II. TEOR. II.

200. *Sia AB un arco di cerchio, il cui centro sia O, e CD sia una retta qualunque. Dagli punti A, B, e O si calino AC, BD, OL perpendicolari a CD. Dico essere la superficie curva, che descrive l'arco AB, girando la figura mistilinea ACDB con una perfetta rivoluzione intorno a CD, uguale al rettangolo fatto dall' arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL, toltone l'altro fatto dalla retta CD, e dalla periferia intera, di cui è parte l'arco AB.* Fig.46

DIMOSTRAZIONE.

Per O si tiri PQ parallela a CD; e da qualunque punto E dell' arco AB si cali EF perpendicolare a CD, e si prolunghi in K. S'intendano in oltre tirate HM parallela, e infinitamente vicina a FK, e GI parallela a PQ. Finalmente si congiunga il raggio OE. Siccome s'è dimostrato nella prop. prec., così si può anche qui dimostrare che, girando lo spazio ACDB intorno a CD, l'archetto EG descrive una picciola superficie uguale al rettangolo fatto da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio FE; e perciò uguale al rettangolo fatto da EG, e dalla differenza delle periferie de'cerchi descritti co'raggi FK, KE, o OL.

o OL, KE. Ma il rettangolo fatto da EG e dalla periferia del cerchio descritto col raggio KE è uguale al rettangolo fatto da GI, o FH, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OE. Dunque la detta picciola superficie, che descrive EG, è uguale al rettangolo fatto da EG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL, toltone l'altro fatto da FH, e dalla periferia intera, di cui è parte l'arco AB. Dell'istesso modo si dimostra che la picciola superficie, che nella suddetta rivoluzione descrive ogni altro elemento dell'arco AB, è uguale al rettangolo fatto dall'istesso elemento dell'arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL, toltone l'altro fatto dall'elemento corrispondente della retta CD, e dalla periferia intera, di cui è parte l'arco AB. Per la qual cosa l'intera superficie, che descrive l'arco AB, è uguale al rettangolo fatto dall' arco AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL, toltone l' altro fatto dall' intera periferia, di cui è parte l'arco AB, e dalla retta CD. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

201. Essendo, compito il mezzo cerchio PABQ, la fascia sferica, che descriverebbe l'arco AB, se il mezzo cerchio PABQ giras-

raſſe intorno a PQ, uguale al rettangolo fatto da XY, o CD, e dalla periferia intera, di cui è parte l'arco AB (§ 162). Sarà la ſuperficie, che deſcrive l'arco AB, girando ACDB intorno a CD, uguale al rettangolo fatto dall'arco AB, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OL, toltane la faſcia sferica, che l'iſteſſo arco AB deſcriverebbe, ſe il mezzo cerchio PABQ giraſſe intorno a PQ.

COROLLARIO II.

202. Se CD ſarà tangente in qualunque punto dell'arco AB; la ſuperficie, che deſcriverà allora l'arco AB, girando la figura ACDB intorno a CD, ſarà uguale al rettangolo fatto dalla periferia intera, di cui è parte l'arco AB, e dalla differenza della tangente CD dall'arco AB.

COROLLARIO III.

203. Sia di più l'arco AEI ſituato in modo per riſpetto di AB, che la ſua corda AI ſia perpendicolare ad AB. Pel centro O dell'intero cerchio ſi tiri OE parallela ad AB, e dagli punti O, ed E ſi calino OD, EG perpendicolari a BA prolungata in G. Girando la porzione AEI intorno a BA, conſervandoſi intanto ſempre AI perpendicolare ad AB, l'arco EI deſcriverà una ſu-

Fig. 47.

ſuperficie uguale al rettangolo fatto dall'arco EI, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OD, una col rettangolo fatto da GA, e dall'intera periferia, di cui EI è parte (§ 198); e l'arco AE deſcriverà una ſuperficie uguale al rettangolo fatto dall'arco AE, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OD, toltone l'altro fatto da GA, e dall'intera periferia, di cui EA è parte (§ 200). Sicchè l'intero arco AEI nella detta rivoluzione deſcriverà una ſuperficie uguale al rettangolo fatto dall'intero arco AEI, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OD.

COROLLARIO IV.

204. Quindi la ſuperficie, che deſcrive l'arco EI nella detta rivoluzione, eccede quella, che deſcrive AE, del doppio del rettangolo fatto da AG, o EL, e dalla periferia intera, di cui AEI è parte, o del doppio della ſuperficie sferica, che deſcriverebbe EI, o EA, ſe lo ſpazio ELI, o ELA giraſſe intorno a EO (§ 162).

LEMMA.

Fig.48 205. *Sia AC la ſomma di due rette qualunque AB, BC. Dico che il cerchio, che ha per raggio AC, è uguale alla ſomma de' cerchi, che hanno per raggi AB, BC, una col ret-*

rettangolo fatto dalla periferia d'uno di essi, e dal raggio dell' altro.

DIMOSTRAZIONE.

Si formi su AC il mezzo cerchio ADC; e, innalzata da B sulla retta AC la perpendicolare BD, si congiungano AD, DC. Sarà il cerchio, che ha per raggio AC, alla somma di quelli, che hanno per raggi AD, DC, come il quadrato di AC alla somma de' quadrati di AD, DC (§ 346 *del tom.* 2). Ma il quadrato di AC uguaglia la somma de' quadrati di AD, DC § 132 *del tom.* 2). Dunque il cerchio, che ha per raggio AC anche uguaglia la somma di quelli, che hanno per raggi AD, DC (§ 244 *del tom.* 2). Similmente si dimostra che 'l cerchio, il cui raggio è AD, è uguale alla somma di quelli, che hanno per raggi AB, BD; e che il cerchio, il cui raggio è DC, è uguale alla somma di quelli, che hanno per raggi CB, BD. Sicchè il cerchio, che ha per raggio AC, è uguale alla somma di quelli, che hanno per raggi AB, BC, una col doppio di quello, che ha per raggio BD. In oltre, essendo AB, BD, BC continuamente proporzionali (§ 305 *del tom.* 2), sarà AB: BC, come il quadrato di AB al quadrato di BD (§ 269 *del tom.* 2); e perciò le periferie de' cerchi, che hanno per raggi AB, BC,

 so-

sono tra loro nella ragione de' cerchi, che hanno per raggi AB, BD (§ 346 *del tom.* 2); e conseguentemente nella ragione de' medesimi cerchi è anche la ragione de' rettangoli fatti dalle dette periferie, e dalla retta AB (§ 322 *del tom.* 2). Ma il rettangolo fatto dalla periferia del cerchio, che ha per raggio AB, e dall'istessa AB è il doppio del cerchio, che ha per raggio AB (343 *del tom.* 2). Sicchè il rettangolo fatto dalla periferia del cerchio, il cui raggio è BC, e da AB è pure il doppio del cerchio, che ha per raggio BD. Dell'istesso modo si dimostra essere il rettangolo fatto dalla periferia del cerchio, che ha per raggio AB, e da BC il doppio del cerchio, che ha per raggio BD. Per la qual cosa il cerchio, che ha per raggio AC, è uguale alla somma de' cerchi, che hanno per raggi AB, BC, una col rettangolo fatto dalla periferia d'uno di essi, e dal raggio dell'altro. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

206. Si noti che d'una maniera consimile si può anche dimostrare che il cerchio, che ha per raggio la retta AB, differenza delle due AC, CB, è uguale alla somma dei cerchi, che hanno per raggi le rette AC, CB, toltone il rettangolo fatto dalla pe-

periferia d' uno di essi, e dal raggio dell' altro.

PROP. III. TEOR. III.

207. *Sia l'istesso, che s' è supposto nella prop. 1.. Dico che 'l solido, che genera lo spazio ACDB, girando con una perfetta rivoluzione intorno a CD, è uguale alla somma del solido sferico, e del cilindro retto, che lo spazio circolare AXYB, e 'l rettangolo CXYD genererebbero rispettivamente, se girassero intorno a PQ, aggiuntovi, o toltovi, secondochè CD cade sotto, o sopra del centro O, il prisma, che ha la base uguale allo spazio circolare AXYB, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL.* Fig. 45.

DIMOSTRAZIONE.

S' intenda la preparazione fatta nella prop. 1.. Si potranno senza errore sensibile prendere i piccioli solidi, che generano FEGH, girando intorno CD, e KEGM, girando intorno PQ, per piccioli cilindri. Essendo il cerchio, che ha per raggio FE uguale alla somma de' cerchi, che hanno per raggi FK, KE, aggiuntovi, o toltovi, secondochè CD cade sotto, o sopra del centro O, il rettangolo fatto da KE, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio FK, o OL. Sarà il cilindretto, che ha per al-

tezza FH , e per base il cerchio descritto col raggio FE , uguale alla somma de' cilindretti , che hanno l' istessa altezza FH , e per basi i cerchi descritti co' raggi FK , KE , aggiuntovi , o toltovi , secondochè CD cade sotto , o sopra di O , il parallelepipedo rettangolo fatto da FH , o KM , da KE , e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL , o sia il prisma , che ha la base uguale allo spazio KEGM ; e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL . Sicchè il solidetto , che genera FEGH girando intorno a CD , elemento del solido , che genera ACDB , girando pure intorno a CD , è uguale alla somma de' cilindretti , che generano il rettangolo FM , e lo spazio KEGM , girando intorno a PQ , o alla somma de' corrispondenti elementi del cilindro , e del solido sferico , che generarebbero il rettangolo CXYD , e lo spazio circolare AXYB , se girassero intorno a PQ , aggiuntovi , o toltovi , secondochè CD cade sotto , o sopra di O , il prisma , che ha la base uguale all' elemento corrispondente EGMK dello spazio circolare AXYB , e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL . L' istesso si può dimostrare di tutti gli altri elementi componenti il solido , che genera ACDB , girando intorno a CD . Dunque il solido , che genera ACDB , girando intorno a CD , è uguale alla somma

del

del cilindro retto, e del solido sferico, che generarebbero il rettangolo CXYD, e lo spazio circolare AXYB, se girassero intorno a PQ, aggiuntovi, o toltovi, secondochè CD cade sotto, o sopra di O, il prisma, che ha la base uguale allo spazio circolare AXYB, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

PROP. IV. TEOR. IV.

208. *Sia l'istesso, che s'è supposto nella prop. 2. Dico essere il solido, che genera lo spazio ACDB, girando intorno a CD con una perfetta rivoluzione, uguale alla somma del cilindro retto, e del solido sferico, che rispettivamente descriverebbero il rettangolo CXYD, e lo spazio circolare AXYB, se girassero intorno a PQ, toltone il prisma, che ha la base uguale allo spazio circolare AXYB, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL.* Fig.46.

DIMOSTRAZIONE.

S'intenda la preparazione fatta nella prop. 2. Si potranno prendere senza errore sensibile i piccioli solidi, che generano FEGH, girando intorno a CD, ed EGMK, girando intorno a PQ, per piccioli cilindri. Essendo il cerchio, che ha per raggio FE, uguale alla somma de' cerchi, che hanno per raggi FK,

 KE,

KE, toltone il rettangolo fatto da KE, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio FK, o OL (§ 206). Sarà il cilindretto, che ha per altezza FH, e per base il cerchio descritto col raggio FE, uguale alla somma de' cilindretti, che hanno per altezza FH, e per basi i cerchi descritti co' raggi FK, KE, toltone il parallelepipedo rettangolo fatto da FH, o KM, da KE, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OL, o sia il prisma, che ha la base uguale allo spazietto KEGM, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL. Dunque il solidetto, che genera EFHG, girando intorno a CD, elemento del solido, che genera ACDB, girando pure intorno a CD, è uguale alla somma de' cilindretti, che generano FKMH, EKMG, girando intorno a PQ, o' alla somma de' corrispondenti elementi del cilindro, e del solido sferico, che genererebbero il rettangolo CXYD, e lo spazio circolare AXYB, se girassero intorno a PQ, toltone però il prisma, che ha la base uguale all' elemento EKMG corrispondente dello spazio circolare AXYB, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OL. L' istesso si può dimostrare per rispetto a tutti gli altri elementi componenti il solido, che genera ACDB, girando intorno a CD. Sicchè il solido, che genera ACDB, girando intorno a CD, è ugua-

uguale alla fomma del cilindro retto, e del folido sferico, che genererebbero il rettangolo CXYD, e lo fpazio circolare AXYB, fe giraffero intorno a PQ, toltone il prifma, che ha la bafe uguale allo fpazio circolare AXYB, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio defcritto col raggio OL. Ch'è ciò, che bifognava dimoftrare.

COROLLARIO.

209. Sia la porzione circolare AEI difpofta in modo per rifpetto di AB, che AI fia perpendicolare ad AB. Pel centro O dell' intero cerchio fi tiri OE parallela ad AB, e dagli punti O, ed E fi calino OD, EG perpendicolari ad AB prolungata in G. Girando la figura racchiufa dalle rette EG, GA, AI, e dall'arco EI intorno ad AB, fi ha la fomma de' folidi, che generano la porzione circolare AEI, e lo fpazio miftilineo AGE. Onde il folido, che genera la porzione circolare AEI è uguale al folido, che genera lo fpazio EGAI, toltone il folido, che genera lo fpazio EGA. Ma il primo di quefti folidi è uguale alla fomma della porzione sferica, e del cilindro retto, che generano lo fpazio ELI, e'l rettangolo GL, girando intorno a EO, aggiuntovi il prifma, che ha la bafe uguale a ELI, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio defcritto col raggio OD (§ 207); e 'l fecondo è ugua-

Fig. 47.

uguale alla somma della porzione sferica, e del cilindro retto, che generano lo spazio ELA, o ELI, e'l rettangolo GL, girando intorno a EO, toltone il prisma, che ha la base uguale allo spazio ELA, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD (§ 208). Dunque il solido, che genera nella suddetta rivoluzione l' intera porzione circolare AEI, è uguale al prisma, che ha la base uguale all' istessa porzione AEI, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD.

CAP. II.

Delle grandezze, che hanno le superficie, e le solidità sì delle Botti, che degli Sferoidi.

DEFINIZIONE I.

Fig. 49. 210. Contrassegni ABCD qualsisia botte. Si dirà la retta AD, ch' è perpendicolare ai fondi AB, DC, *Altezza* della botte. I diametri AB, DC de' fondi si diranno le *Larghezze minime* della botte. Finalmente il diametro EF del cerchio massimo, che divide l'altezza AD in due parti uguali, e ad

ad angoli retti, si dirà la *Larghezza massima* della botte.

AVVERTIMENTO.

211. Si noti che la curvatura AED d'ogni botte si può senza errore considerabile prendere per quella d' un arco circolare. Onde ogni botte si può considerare come generata da uno spazio circolare RAEDS, che gira con una perfetta rivoluzione intorno alla retta RS, che congiugne i centri R, e S de' fondi, ed è conseguentemente uguale, e parallela all' altezza AD.

DEFINIZIONE II.

212. Si chiama *Sferoide* ogni solido, che si può considerare come generato da qualsivoglia porzione circolare ACB, diversa dal mezzo cerchio, mossa intorno la retta AB con una perfetta rivoluzione. Fig.47. e 50

DEFINIZIONE III.

213. Dello sferoide si diranno *Asse* la retta AB; *Cerchio massimo* quello, che si potrà considerare come descritto da DC, la quale divide l' asse AB in due parti uguali, e ad angoli retti, e *Porzione generatrice* la porzione circolare, dalla quale si potrà lo sferoide intendere generato.

DE-

DEFINIZIONE IV.

214. Lo sferoide si dirà *rilevato*, o *incavato*, secondochè sarà negli estremi dell' asse rilevato in fuori, o incavato in dentro.

PROP. V. PROBL. I.

215. *Date di qualunque botte la massima larghezza, la larghezza minima, e l'altezza, ritrovare il centro dell' intero cerchio, e descrivere lo spazio circolare, dal quale si può ella considerare come generata.*

SOLUZIONE.

Fig.49. 1. Si faccia il rettangolo ARSD, che abbia il lato AD uguale all' altezza della botte, e 'l lato AR uguale alla metà della larghezza minima.

2. Divisi i lati AD, RS in due parti uguali in G, e P, si congiunga GP, e si prolunghi in E, finchè PE sia uguale alla metà della larghezza massima.

3. Si prolunghi EP in O, finchè EO sia uguale alla metà della somma di EG, e della terza proporzionale trovata in ordine a EG, e GD.

4. Finalmente col centro O, e coll' intervallo OE si descriva l'arco circolare AED.

Dico essere O il centro cercato, e RA-
EDS

EDS lo ſpazio cercato.

La ragione di ciò è da ſe manifeſta.

PROP. VI. TEOR. V.

216. *Sia RAEDS lo ſpazio circolare, da cui ſi può intendere deſcritta una botte, e ſia O il centro dell' intero cerchio. Sieno di più per O tirata XY parallela a RS, e le rette AR, DS prolungate in L, e M. Dico che la ſuperficie interna della botte è uguale alla differenza de' due rettangoli fatti, uno dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OE, e d' altezza AD, e l' altro dall' arco AED, e dalla periferia del cerchio deſcritto col raggio OP; e che il vano dell' iſteſſa botte è uguale alla ſomma del ſolido sferico, e del cilindro retto, che genererebbero lo ſpazio circolare LAEDM, e 'l rettangolo LRSM, ſe giraſſero intorno a XY, toltone il priſma, che ha la baſe uguale allo ſpazio circolare LAEDM, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio deſcritto col raggio OP.*

DIMOSTRAZIONE.

E' nota per gli §§ 198, e 207.

AVVERTIMENTO.

217. Si noti che, tirati i raggi OA, OD, lo ſpazio circolare LAEDM è la ſomma

ma del settore circolare AOD, e de' triangoli rettangoli ALO, DMO; e che il solido sferico, che genererebbe LAEDM, se girasse intorno a XY, è la somma del solido sferico, e de' coni retti, che nella medesima rivoluzione genererebbero rispettivamente il settore circolare AOD, e i triangoli rettangoli ALO, DMO.

PROP. VII. PROBL. II.

218. *Dati di qualunque sferoide l'asse, e'l diametro del cerchio massimo, ritrovare il centro dell'intero cerchio, e descrivere la porzione generatrice.*

SOLUZIONE.

Fig. 47, e 50

1. Si prendano AB uguale all' asse, e CD uguale al raggio del cerchio massimo; e si dispongano in modo, che CD divida AB in due parti uguali, e ad angoli retti.

2. Si prolunghi CD in O, finchè CO sia la metà della somma di CD, e della terza proporzionale trovata in ordine a CD, DB.

3. Finalmente col centro O, e coll' intervallo OC si descriva l' arco circolare ACB.

Dico essere O il centro cercato, e ACB la porzione cercata.

La ragione di ciò da se facilmente s' intende.

PROP.

PROP. VIII. TEOR. VI.

219. *Sia ACB la porzione generatrice d' uno sferoide rilevato; e sieno O il centro dell' intero cerchio, EF un diametro parallelo ad AB, e AL, BM perpendicolari a EF. Dico che la superficie dello sferoide è uguale alla differenza de' due rettangoli fatti, uno dall' asse AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OC, e l'altro dall' arco ACB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OD; e che la solidità è uguale alla somma del solido sferico, e del cilindro retto, che genererebbero lo spazio circolare LACBM, e'l rettangolo LABM, se girassero intorno a EF, toltone il prisma, che ha la base uguale allo spazio circolare LACBM, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD.* Fig. 50.

DIMOSTRAZIONE.

E' nota per gli §§ 198, e 207.

PROP. IX. TEOR. VII.

220. *Sia AECFB la porzione generatrice d' uno sferoide incavato; e sieno O il centro dell' intero cerchio, EF il diametro parallelo ad AB, e AI, DC, BK perpendicolari a EF. Dico che la superficie dello sferoide è uguale al-* Fig. 47.

alla somma de' due rettangoli fatti, uno dalla retta AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OC, l'altro dall'arco AECFB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OD; e che la solidità è uguale alla somma del solido sferico, e del cilindro retto, che descriverebbero lo spazio circolare LICKM, e 'l rettangolo LABM, se girassero intorno a EF, aggiuntovi il prisma, che ha la base uguale allo spazio mistilineo ALECFMB, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD.

DIMOSTRAZIONE.

I. Essendo AECFB la porzione generatrice; sarà la superficie dello sferoide uguale alla somma di quelle, che descriverebbero gli archi ICK, AEI, BFK, se gli spazj AICKB, AEI, BFK girassero intorno ad AB. Ma la superficie, che descriverebbe l'arco ICK in sì fatta rivoluzione, è uguale alla somma de' due rettangoli fatti, uno da AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OC, e l'altro dall'arco ICK, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OD (§ 198); e le superficie, che descriverebbero gli archi AEI, BFK nella medesima rivoluzione, uguagliano i rettangoli fatti dagli stessi archi AEI, BFK, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OD (§ 203). Dunque la su-

superficie dello sferoide incavato, che ha per porzione generatrice AECFB, è uguale alla somma de' due rettangoli fatti, uno da AB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OC, e l'altro dall'arco AECFB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OD.

II. In oltre lo sferoide uguaglia la somma de' solidi, che genererebbero, girando intorno ad AB, gli spazj circolari AICKB, AEI, BFK. Ma il solido, che genererebbe AICKB, è uguale alla somma del solido sferico, e del cilindro retto, che rispettivamente genererebbero, girando intorno a EF, lo spazio circolare LICKM, e 'l rettangolo ALMB, aggiuntovi il prisma, che ha la base uguale a LICKM, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD (§ 207); e i solidi, che genererebbero gli spazj AEI, BFK uguagliano i prismi, che hanno le basi uguali agli stessi spazj AEI, BFK, e l'altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD (§ 209). Sicchè lo sferoide, che ha per porzione generatrice AECFB, è uguale alla somma del solido sferico, e del cilindro retto, che lo spazio circolare LICKM, e 'l rettangolo ALMB rispettivamente genererebbero, girando intorno a EF, aggiuntovi il prisma, che ha la base uguale allo spazio racchiuso dalle rette AL, LM, MB, e dall'arco AECFB, e l'altezza u-

 gua-

guale alla periferia del cerchio descritto col raggio OD. Ch' è quanto bisognava dimostrare.

AVVERTIMENTO.

Fig. 37. 221. Si noti che, oltre i già detti, si possono avere due altri sferoidi, uno come generato dalla mezza ovale PRQ, mossa intorno all' asse maggiore PQ, e l' altro come generato dalla mezza ovale SPR, mossa intorno all' asse minore SR. Però di sì fatti sferoidi nè il primo è rilevato, nè il secondo è incavato; anzi il primo è composto da uno sferoide circolare rilevato, ma troncato da ambedue le parti, che si può considerare generato dallo spazio circolare MFREN, mosso intorno a PQ, e da due porzioni sferiche, che si possono considerare generate dagli spazj PMF, ENQ, mossi pure intorno a PQ; e'l secondo è composto da uno sferoide circolare incavato, ma troncato pure da ambe le parti, che si può considerare generato dallo spazio circolare TFPGY, mosso intorno a SR, e da due porzioni sferiche, che si possono considerare generate dagli spazj FTR, YGS, mossi pure intorno a SR. Sicchè si possono avere le superficie, e le solidità di sì fatti sferoidi, determinando le superficie, e le solidità degli sferoidi troncati, e delle porzioni sferiche, che li compongono.

CAP.

C A P. III.

Delle grandezze, che hanno le superficie, e le solidità degli Anelli sferici.

DEFINIZIONE I.

222. Sia ACBD un cerchio qualunque, Fig. 51. il cui centro è O; e EF sia una retta esistente fuori di tale cerchio. Si tiri in ACBD il diametro AB parallelo a EF, e dagli punti A, O, B si calino sù EF le perpendicolari AL, OP, BM. S' intenda in oltre la figura LACBM girare intorno a EF con una perfetta rivoluzione. Il solido, che si può considerare come generato in sì fatta rivoluzione dal cerchio ACBD, si dirà *Anello sferico*. Il solido poi, che si può considerare come generato dallo spazio LADBM, si dirà il *Vano dell' anello sferico*. Di più il cerchio ACBD si dirà il *Cerchio generatore* dell' anello. La periferia, che descrive il centro O, si dirà *Linea centrale*. La retta OP si dirà *Raggio* dell' anello. E finalmente la linea EF si dirà l' *Asse* dell' anello.

DEFINIZIONE II.

223. L'anello sferico si dirà *Anello chiuso*, o *Anello aperto*, secondochè il suo asse sarà sì, o no tangente del cerchio generatore.

COROLLARIO.

224. Dunque nell'anello chiuso il raggio dell'anello è l'istesso di quello del cerchio generatore.

PROP. X. TEOR. VIII.

225. *La superficie di qualunque anello sferico è uguale al rettangolo fatto dalla periferia del cerchio generatore, e dalla linea centrale.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano essere ACBD il cerchio generatore, EF l'asse, OP il raggio dell'anello, e AB il diametro parallelo all'asse. Sarà la superficie dell'anello uguale alla somma delle superficie, che descrivono le mezze periferie ACB, ADB, girando la figura LACBM intorno ad EF. Ma la superficie, che descrive la mezza periferia ACB, è uguale al rettangolo fatto dall'

arco

arco ACB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, aggiuntovi il rettangolo fatto da AB, e dalla periferia ACBD (§ 198); e la superficie, che descrive la mezza periferia ADB, è uguale al rettangolo fatto dell'arco ADB, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, toltone il rettangolo fatto da AB, e dalla periferia ACBD (§ 200). Sicchè la superficie dell'anello è uguale al rettangolo fatto dalla periferia ACBD del cerchio generatore, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, o sia dalla linea centrale. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

226. Quindi la superficie d'ogni anello sferico è uguale alla superficie d'un cilindro retto, che ha per base il cerchio generatore, e per altezza una retta uguale alla linea centrale. E perciò le superficie degli anelli sferici sono tra loro in ragione composta dalla ragione de' raggi de' cerchi generatori, e da quella de' raggi degli anelli; e conseguentemente sono nella ragione de' quadrati de' raggi de' cerchi generatori, o de' raggi degli anelli, se i raggi de' cerchi generatori sono proporzionali a' raggi degli anelli; nel qual caso gli anelli si dicono simili tra loro.

COROLLARIO II.

227. In oltre la porzione della superficie dell' anello, che si può considerare generata da qualunque arco GAH, tagliato dalla retta GQ perpendicolare a EF, è uguale alla somma delle superficie, che descrivono gli archi GA, AH, girando la figura LACBM intorno a EF. Ma quella, che descrive AG uguaglia la somma de' rettangoli fatti, uno da AG, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, e l'altro da AI, e dalla periferia ACBD (§ 198); e quella, che descrive AH uguaglia la differenza de' rettangoli fatti, uno da AH, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, e l' altro da AI, e dalla periferia ACBD (§ 200). Dunque la detta porzione della superficie dell' anello è uguale al rettangolo fatto dall' intero arco GAH, e dalla periferia del cerchio descritto col raggio OP, o sia dalla linea centrale. Similmente si dimostra essere la superficie della restante porzione dell' anello uguale al rettangolo fatto dall' arco GBH, e dalla linea centrale.

COROLLARIO III.

228. Sicchè, se un anello sferico è tagliato da un piano perpendicolare al suo asse, le superficie annolari di tali porzioni sono

fono nella ragione de' corrifpondenti archi, ne' quali la periferia del cerchio generatore viene divifa dal medefimo piano (§ 322 *del tom.* 2).

PROP. XI. TEOR. IX.

229. *Ogni anello sferico è uguale al cilindro, che ha per bafe il cerchio generatore, e per altezza una retta uguale alla linea centrale.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano effere ACBD il cerchio generatore d' un anello, EF il fuo affe, OP il fuo raggio, e AB il diametro parallelo a EF. Sarà l' anello uguale alla differenza de' folidi, che generano le figure LACBM, LADBM, girando lo fpazio LACBM intorno a EF. Ma il primo di sì fatti folidi uguaglia la fomma della sfera, e del cilindro retto, che 'l mezzo cerchio ACB, e 'l rettangolo LABM generano, girando intorno a AB, aggiuntovi il prifma, che ha la bafe uguale al mezzo cerchio ACB, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio defcritto col raggio OP (§ 207); e 'l fecondo uguaglia la fomma della sfera, e del cilindro retto, che generano il mezzo cerchio ADB, e 'l rettangolo LABM, girando intorno a AB, toltone il prifma, che ha la bafe uguale al mezzo cerchio ADB, e l' altezza uguale alla peri-

feria del cerchio descritto col raggio OP (§208). Sicchè l'anello è uguale al prisma, ovvero al cilindro, che ha per base il cerchio generatore ACBD, e per altezza una retta uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OP, o sia alla linea centrale. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

230. Quindi gli anelli sferici sono tra loro in ragione composta dalla semplice de' loro raggi, e dalla duplicata de' raggi de' cerchi generatori; e conseguentemente sono in ragione triplicata de' loro raggi, o de' raggi de' cerchi generatori, se sono simili tra loro, cioè se i loro raggi sono proporzionali a' raggi de' cerchi generatori.

COROLLARIO II.

231. In oltre la porzione dell'anello, che si può considerare come generata da qualunque porzione GAH del cerchio generatore, tagliata dalla retta GQ perpendicolare a EF, è uguale alla differenza de' solidi, che generano gli spazj LAGQ, LAHQ, girando intorno a EF. Ma il primo di sì fatti solidi è uguale alla somma della porzione sferica, e del cilindro retto, che generano IAG, e IALQ girando inter-

torno ad AB, aggiuntovi il prisma, che ha la base uguale a IAG, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OP (§ 207); e 'l secondo è uguale alla somma della porzione sferica, e del cilindro retto, che generano IAH, e IALQ, girando pure intorno ad AB, toltone il prisma, che ha la base uguale a IAH, e l' altezza uguale alla periferia del cerchio descritto col raggio OP (§ 208). Dunque la detta porzione dell' anello è uguale al prisma, che ha la base uguale all' intera porzione circolare GAH, e l' altezza uguale alla linea centrale. Similmente si dimostra essere la restante porzione dell' anello uguale al prisma, che ha la base uguale alla restante porzione circolare GBH, e l' altezza uguale alla linea centrale.

COROLLARIO III.

232. Sicchè, se un anello è tagliato da un piano perpendicolare al suo asse, le porzioni dell' anello sono tra loro nella ragione delle porzioni circolari, nelle quali dal medesimo piano viene diviso il cerchio generatore.

AVVERTIMENTO.

233. Si noti che ciò, che s' è dimostrato dell' anello, supposto ACBD essere un cer-

cerchio, si può anche applicare all' anello, che nasce, qualora ACBD è un' ovale, purchè AB sia uno degli suoi assi.

CAP. IV.

Delle grandezze, che hanno le superficie cilindriche, e le solidità delle mezze Ugne, e delle mezze Lunette cilindriche.

DEFINIZIONE I.

Fig.52. 234. Sia il cilindro retto ABCD tagliato da qualunque piano ECF, che sia inclinato al suo asse, e che incontri in qualunque retta EF la sua base. La porzione EFBC si chiama *Ugna cilindrica*.

DEFINIZIONE II.

235. L' ugna cilindrica EFBG si dirà *Ugna centrale*, o *Ugna non centrale*, secondochè EBF sarà sì, o no mezzo cerchio.

DE-

DEFINIZIONE III.

236. Contraffegnino AEBCOD qualunque Fig. 51. porzione di cilindro retto, e ABEO l'ugna, che a lei s'appartiene. Sia di più EPQO un piano, che divida in due parti uguali, e ad angoli retti il rettangolo ABCD, e conseguentemente divida in due parti uguali e l'ugna, e 'l restante della porzione cilindrica. Ognuna delle parti uguali APEO, BPEO dell'ugna si dirà *Mezza ugna cilindrica*. Il solido, che nasce congiugnendo insieme le due parti uguali APQDO, BPQCO del restante della porzione cilindrica, e congiugnendole in modo, che combacino PBCQ col rettangolo APQD, e la retta BC con AD, si dirà *Lunetta cilindrica*. Finalmente ciascuna delle due parti uguali APQDO, BPQCO, componenti la detta lunetta, si dirà *Mezza lunetta cilindrica*.

DEFINIZIONE IV.

237. Della mezza ugna APEO si diranno *Base* lo spazio circolare APE, *Altezza* la retta EO, *Vertice* il punto O, e *Sezione massima* il triangolo rettangolo OEP. Similmente della mezza lunetta APQDO si diranno *Base* lo spazio circolare DQO, e *Altezza* la retta DA.

PROP.

PROP. XII. TEOR. X.

Fig. 54. 238. *Contrassegni DEBC qualunque mezza ugna non centrale, la cui base DEB sia minore del quadrante circolare AOB. Dico essere la superficie cilindrica DCB di sì fatta mezza ugna quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC, e alla differenza de' due rettangoli fatti, uno dal raggio OB, e dalla retta DE, e l'altro dalla retta OE, e dall'arco BD.*

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano nella mezza ugna fatte le sezioni LNM, PRQ infinitamente vicine tra loro, e parallele alla sezione massima BEC. Saranno LM, PQ, come porzioni de' lati del cilindro, linee rette, e rette perpendicolari alla base DEB; e conseguentemente le sezioni LNM, PRQ saranno triangoli, e triangoli simili alla sezione massima BEC. Si prolunghi LN in G; si congiunga il raggio LO; e per L si tiri LF parallela a DE, e conseguentemente parallela ad AO. Essendo le rette LM, PQ parallele, e infinitamente vicine tra loro, si potrà senza sensibile errore prendere LM = PQ; e si potrà altresì senza sensibile errore prendere la superficietta LMQP, elemento della superficie cilindrica DCB, uguale al rettangolo di LM, LP. Ma il ret-

rettangolo di LM, LP sta al rettangolo di LN, LP, come LM : LN (§ 322 *del tom.* 2), o come CB : BE (§ 299 *del tom.* 2). Dunque l' elemento LMQP della superficie cilindrica DCB sta al rettangolo di LN, LP, come CB : BE. In oltre il rettangolo di LN, LP è uguale al rettangolo di LG, LP, toltone l' altro di NG, LP, o di OE, LP; e'l rettangolo di LG, LP, essendo LFP simile a LGO, e conseguentemente PL : LF = LO : LG, è uguale al rettangolo di OL, LF, o di OB, NR. Sicchè l' elemento LMQP della superficie cilindrica DCB sta alla differenza de' rettangoli di OB, NR, e di OE, LP, come CB : BE. Dell' istesso modo si dimostra che ogni altro elemento della superficie cilindrica DCB, compreso tra i lati di due sezioni fatte nella mezza ugna, infinitamente vicine tra loro, e parallele alla sezione massima BEC, sta alla differenza de' rettangoli fatti, uno dal raggio OB, e dall' elemento corrispondente della retta DE, e l' altro da OE, e dall' elemento corrispondente dell' arco BD, come CB : BE. E perciò l' intera superficie cilindrica DCB sta alla differenza de' due rettangoli fatti, uno dal raggio OB, e dall' intera retta DE, e l' altro da OE, e dall' arco BD, come CB : BE (§ 288 *del tom.* 2). Per la qual cosa la superficie cilindrica DCB è quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC,

e al-

e alla differenza de' due rettangoli fatti, uno dal raggio OB, e dalla retta DE, e l' altro da OE, e dall' arco BD. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

229. Essendo ognuno de' detti elementi della superficie cilindrica DCB alla differenza de' rettangoli fatti, uno da OB, e dall' elemento corrispondente della retta DE, e l' altro da OE, e dall'elemento corrispondente dell' arco BD, come CB : BE. Fatta nella mezza ugna qualunque sezione LNM parallela alla sezione massima BEC, sarà la superficie cilindrica LMCB quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC, e alla differenza de' rettangoli di OB, EN, e di OE, BL; e sarà la superficie cilindrica DML quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC, e alla differenza de' rettangoli di OB, DN, e di OE, LD.

COROLLARIO II.

240. E perciò, se sarà CB = BE, saranno la superficie DCB uguale alla differenza de' rettangoli di OB, DE, e di OE, BD, la superficie LMCB uguale alla differenza de' rettangoli di OB, EN, e di OE, BL, e la superficie DML uguale alla differenza de' rettangoli di OB, DN, e di OE, LD.

CO-

COROLLARIO III.

241. In oltre, se due mezze ugne cilindriche avranno l' istessa base DEB, ma altezze diverse, sarà la superficie cilindrica dell' una alla superficie cilindrica dell' altra, come l' altezza dell' una all' altezza dell' altra.

COROLLARIO IV.

242. Si supponga la base DEB divenire uguale al quadrante circolare AOB; diverranno DE = AO, BE = BO, e EO nulla; e conseguentemente a nulla si ridurranno i rettangoli di OE, BD, di OE, BL, e di OE, LD; e diverrà altresì DEBC una mezza ugna centrale. Sicchè la superficie cilindrica DCB della mezza ugna centrale sta al rettangolo di BE, ED, o sia al quadrato di BE, come il rettangolo di CB, BE al quadrato di BE; e perciò la superficie cilindrica della mezza ugna centrale è uguale al rettangolo fatto dalla sua altezza BC, e dal raggio BE della sua base, e conseguentemente è il doppio della sua sezione massima BEC. Similmente si dimostra nel caso della mezza ugna centrale essere la superficie cilindrica LMCB uguale al rettangolo fatto dall' altezza BC, e da EN, e la superficie cilindrica DML uguale al rettangolo di BC, DN.

CO-

COROLLARIO V.

243. Si ſupponga finalmente DEB eſſere maggiore del quadrante circolare AOB. In tale caſo DEBC è pure mezza ugna non centrale; però DE cade dall'altra banda per riſpetto di AO, e conſeguentemente LN diviene uguale alla ſomma di LG, e GN. Onde il rettangolo di LN, LP diviene uguale alla ſomma de' rettangoli di LG, LP, e di GN, LP, e conſeguentemente uguale alla ſomma de' rettangoli di OB, NR, e di OE, LP. E perciò in sì fatto caſo faranno la ſuperficie cilindrica DCB quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC, e alla ſomma de' rettangoli di OB, DE, e di OE, BD, la ſuperficie LMCB quarta proporzionale in ordine alle rette BE, BC, e alla ſomma de' rettangoli di OB, EN, e di OE, BL, e finalmente la ſuperficie DML quarta proporzionale in ordine alle rette BE, C, e alla ſomma de' rettangoli di OB, DN, e di OE, LD.

AVVERTIMENTO I.

Fig. 55 244. Sia dalla quarta parte di cilindro retto, formato ſulla quarta parte ABC d'un ovale, tagliata col piano ADB, che paſſi per

per AB, metà dell' asse maggiore, la mezza ugna ABCD. Supposta in L l' unione de' due archi circolari, componenti la curva CA; supposto che O, e P sieno i centri de' cerchi, delle periferie de' quali gli archi CL, LA sono porzioni; e supposta essere LNM la sezione della mezza ugna, che passa per L, e ch'è parallela alla sezione massima CBD. E' chiaro che la sezione LNM divide la mezza ugna ABCD in due porzioni di mezze ugne cilindriche circolari, delle quali ANLM è porzione di mezza ugna centrale, e 'l restante LNMDBC è porzione d' ugna non centrale, fatta su d' una base minore del quadrante circolare. Sicchè, se si cercherà la quarta proporzionale in ordine alle rette BC; CD, e alla differenza de' rettangoli di OC, BN, e di OB, CL, s' avrà la superficie cilindrica LMDC. Se poi si cercherà la quarta proporzionale in ordine alle rette NL, LM, AP, o in ordine alle rette CB, CD, e AP, s'avrà l' altezza dell' intera detta mezza ugna centrale; onde il rettangolo fatto da sì fatta altezza, e da AN darà la superficie cilindrica AML. Ed ecco in che modo si può avere la superficie cilindrica della mezza ugna ABCD.

AVVERTIMENTO II.

245. Sia in oltre dalla quarta parte di cilindro retto, formato pure sulla quarta

parte ABC d' un' ovale, tagliata col piano Fig.56. ADB, che passi per AB, metà dell' asse minore, la mezza ugna ABCD. Supposto pure che in L sia l' unione de' due archi circolari, che O, e P sieno i centri de' due cerchi, e che LMN sia la sezione, che passa per L, e ch'è parallela alla sezione massima CBD. Sarà ANLM porzione d'una mezza ugna cilindrica circolare, e centrale, e LNMDBC sarà porzione d'una mezza ugna cilindrica circolare non centrale, che ha la base maggiore del quadrante circolare. Sicchè, se si cercherà in ordine alle rette CB, CD, e alla somma de' rettangoli di PC, BN, e di BP, CL la quarta proporzionale, s' avrà la superficie cilindrica LMDC. Se poi si cercherà la quarta proporzionale in ordine alle rette NL, LM, AO, o alle rette BC, CD, AO, s' avrà l' altezza dell' intera detta mezza ugna centrale. Onde il rettangolo fatto da sì fatta altezza, e da AN darà la superficie cilindrica AML. Ed ecco in che modo si può avere la superficie cilindrica anche della mezza ugna ABCD.

AVVERTIMENTO III.

Fig.57. 246. Si noti finalmente che se AOBCED è la porzione cilindrica, da cui è tagliata la mezza ugna AOBC; s' avrà la superficie cilindrica ADC della mezza lunetta AOEDC con togliere dalla superficie cilindrica ABCD

ABCD la superficie cilindrica ABC della mezza ugna. Onde, se AOB è quadrante circolare, la superficie ADC sarà uguale al rettangolo fatto da BC, o AD, e dalla differenza del raggio OB dall'arco AB, o del raggio ED dall'arco DC.

PROP. XIII. TEOR. XI.

247. *Contrassegni DEBC qualunque mezza ugna non centrale, la cui base DEB sia minore del quadrante circolare AOB. Dico essere la mezza ugna DEBC quarta proporzionale in ordine alla periferia del cerchio descritto col raggio EB, alla retta BC, e al mezzo sferoide descritto da DEB, girando intorno a DE.* Fig. 54.

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano nella mezza ugna fatte le sezioni LNM, PRQ infinitamente vicine tra loro, e parallele alla sezione massima BEC. Potendosi senza errore sensibile prendere i triangoli simili LNM, PRQ come uguali, e lo spazietto LNRP per un rettangolo; si potranno anche prendere l'elemento LNMQRP della mezza ugna, compreso tra le dette sezioni, per un prisma retto infinitamente picciolo, che abbia per base il triangolo LNM, e per altezza NR, e l'elemento corrispondente del mezzo sferoide, descritto da LNRP, per un cilindro retto infinita-

mente picciolo, che abbia per base il cerchio descritto col raggio NL, e per altezza l'istessa NR. Sicchè l'elemento LNMQRP della mezza ugna sta all'elemento corrispondente del detto mezzo sferoide, come il triangolo LNM al cerchio descritto col raggio NL (§ 138), o come LM alla periferia del detto cerchio, ovvero come BC alla periferia del cerchio descritto col raggio EB. Similmente si dimostra che ogni altro elemento della mezza ugna DEBC sta all'elemento corrispondente del detto mezzo sferoide, come BC alla periferia del cerchio descritto col raggio EB. Dunque l'intera mezza ugna DEBC sta all'intero mezzo sferoide, che descrive DEB girando intorno a DE, come BC alla periferia del cerchio descritto col raggio EB (§ 288 *del tom.* 2). Per la qual cosa la mezza ugna DEBC è quarta proporzionale in ordine alla periferia del cerchio descritto col raggio EB, alla retta BC, e al mezzo sferoide, che descrive DEB girando intorno a DE. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO I.

248. Essendo ognuno de' detti elementi della mezza ugna DEBC all'elemento corrispondente del detto mezzo sferoide nella ragione di BC alla periferia del cerchio descritto col raggio EB. Fatta nella mezza ugna

ugna qualunque sezione LNM parallela alla sezione massima BEC; sarà la porzione della mezza ugna LNMCEB quarta proporzionale in ordine alla periferia del cerchio descritto col raggio EB, alla retta BC, e alla porzione del detto mezzo sferoide, descritta dallo spazio LNEB; e sarà la porzione restante DNLM della mezza ugna quarta proporzionale in ordine all' istessa periferia del cerchio descritto col. raggio EB, alla retta BC, e alla porzione dell' istesso mezzo sferoide, descritta dallo spazio DNL.

COROLLARIO II.

249. E perciò, se sarà BC = BE, saranno la mezza ugna DEBC quarta proporzionale in ordine alla periferia di qualunque cerchio, al suo raggio, e al mezzo sferoide descritto da DEB girando intorno a DE, la porzione LNMCEB quarta proporzionale in ordine alla periferia di qualunque cerchio, al suo raggio, e alla porzione del detto mezzo sferoide, che descrive lo spazio LNEB, e finalmente la porzione DNLM quarta proporzionale in ordine alla periferia di qualunque cerchio, al suo raggio, e alla porzione dell' istesso mezzo sferoide, che descrive lo spazio circolare DNL.

COROLLARIO III.

250. In oltre, se due mezze ugne avranno l' istessa base DEB, ma diverse altezze, saranno sì fatte mezze ugne tra loro in ragione delle altezze.

COROLLARIO IV.

251. Si supponga la base DEB divenir uguale al quadrante circolare AOB; il mezzo sferoide diverrà mezza sfera, e la mezza ugna DEBC diverrà mezza ugna centrale. Sicchè sarà la mezza ugna DEBC alla mezza sfera, che descrive DEB, come BC alla periferia del cerchio descritto col raggio EB, o come il triangolo CBE all' istesso detto cerchio, e conseguentemente come il doppio della piramide, che ha per base il triangolo BEC, e per altezza ED, al doppio del cono, che ha per base il cerchio descritto col raggio EB, e per altezza l' istessa ED. Ma la detta mezza sfera è uguale al doppio del detto cono (§ 179). Dunque anche la mezza ugna centrale è il doppio della piramide, che ha per base la sua sezione massima, e per altezza il raggio della sua base (§ 244 *del tom.* 2).

Co-

COROLLARIO V.

252. Si supponga finalmente DEB maggiore del quadrante circolare AOB: Sarà DEBC pure mezza ugna non centrale; però DE caderà dall' altra banda per rispetto di AO. Intanto il mezzo sferoide, che descrive DEB, e le sue porzioni, che descrivono gli spazj circolari DNL, LNEB, hanno sempre alla mezza ugna DEBC, e alle sue porzioni DNLM, LNMCEB rispettivamente la ragione della periferia del cerchio descritto col raggio EB alla retta BC.

AVVERTIMENTO I.

Fig. 55, e 56.

253. Si noti che, supposto tutto ciò, che supposto abbiamo ne' §§ 244, e 245, se si farà come sta la periferia del cerchio, il cui raggio è BC, alla retta CD, così la porzione di sferoide, che descrive LNBC, girando intorno a NB, al quarto proporzionale; s'avrà la porzione LNMDBC della mezza ugna ABCD; e se si farà come sta la stessa detta periferia alla retta CD, così la porzione di sfera, che descrive ANL, girando pure intorno ad AN, al quarto proporzionale; s'avrà l'altra porzione ANLM della detta mezza ugna.

AVVERTIMENTO II.

Fig.57. 254. Si noti di più, che se AOBCED è la porzione cilindrica, da cui à tagliata la mezza ugna AOBC; s'avrà la mezza lunetta AOEDC con togliere dalla porzione cilindrica la mezza ugna. Onde, se AOB è quadrante circolare, s'avrà la mezza lunetta con togliere dal quadrante cilindrico il doppio della piramide, che ha per base il triangolo CBO, o CEO, e per altezza il raggio OA, o ED.

C A P. V.

Delle grandezze, che hanno le superficie, e le solidità de' mezzi poliedri cilindrici.

DEFINIZIONE I.

Fig.58. 255. Contrassegni ABCD qualunque poligono, purchè in lei sia iscrittibile il cerchio. Sia P il centro di sì fatto cerchio; e PF, PG, PH, PI sieno i suoi raggi perpendicolari rispettivamente ad AB, BC, CD, DA. Sia di più PO perpendicolare al poligono ABCD, e uguale a ciascuno de' detti rag-

raggi; e fieno finalmente OPF, OPG, OPH, OPI quadranti di cerchi uguali, descritti col centro P, e coll' intervallo PO. Se si faranno scorrere la rette AB, BC, CD, DA per le periferie de' detti quadranti, mantenendole sempre parallele a esse medesime; le superficie cilindriche, che descriveranno, con intersecarsi scambievolmente, prenderanno la forma di triangoli curvi. Il solido, che sarà compreso da sì fatti triangoli curvi, e dal poligono ABCD, si chiamerà *Mezzo poliedro cilindrico*.

DEFINIZIONE II.

256. Contrassegni ABCD qualunque poligono regolare. Sia P il centro del cerchio iscrittibile in tale poligono; e PE, PF, PG PH fieno i di lei raggi perpendicolari rispettivamente a AB, BC, CD, DA. Sia di più PQ perpendicolare al poligono, e uguale alla metà del suo lato; e fieno finalmente ALB, BMC, CND, DQA mezzi cerchi uguali, e perpendicolari al poligono ABCD. Se si faranno muovere tali mezzi cerchi, mantenendosi sempre paralleli a essi medesimi, e muovere in modo, che i centri di essi vadino scorrendo per le rette EP, FP, GP, HP; le superficie cilindriche, che descriveranno le periferie de' mezzi cerchi, con intersecarsi tra loro, prenderanno la forma di triangoli curvi. Il solido com-

Fig. 59.

compreso da sì fatti triangoli curvi, da' mezzi cerchi suddetti, e dal poligono ABCD si dirà *Mezzo poliedro piano-cilindrico*.

AVVERTIMENTO.

257. Si noti che i spigoli nel primo de' detti solidi risaltano in fuori, nel secondo sono incavati in dentro.

DEFINIZIONE III.

Fig. 58, e 59. 258. Si diranno del solido ABCDO *Base* il poligono ABCD, *Vertice* il punto O, e *Altezza* la retta PO.

PROP. XIV. TEOR. XII.

Fig. 58. 259. *Contrassegni ABCDO qualunque mezzo poliedro cilindrico. Dico che la sua superficie è il doppio della base ABCD, e che la sua solidità è il doppio della piramide, che ha per base ABCD, e per altezza PO.*

DIMOSTRAZIONE.

S'intendano da P tirate agli angoli della base le rette PA, PB, PC, PD. Essendo OPF un quadrante circolare, e FOA una superficie cilindrica per la costruzione; sarà il solido POFA una mezza ugna cilindrica centrale, che ha per base il quadrante circo-

colare OPF, per altezza FA, per vertice il punto A, e per sezione massima APF (§ 237). Sicchè la superficie cilindrica AOF è il doppio del triangolo APF (§ 242), e la mezza ugna OPFA è il doppio della piramide, che ha per base il triangolo APF, e per altezza PO (§ 251). L'istesso si può dimostrare per rispetto di tutti gli altri solidi OPFB, OPGB, OPGC, OPHC, OPHD, OPID, OPIA, componenti l'intero mezzo poliedro ABCDO. E perciò la superficie del mezzo poliedro cilindrico ABCDO è il doppio dell'intera sua base ABCD, e la solidità è il doppio della piramide, che ha per base ABCD, e per altezza PO. Ch'è ciò, che bisognava dimostrare.

COROLLARIO.

260. Sicchè con mezze ugne cilindriche centrali, ricavate da un'istesso cilindro, si può comporre un mezzo poliedro cilindrico; purchè dalle loro altezze, insieme a due a due congiunte in una sola retta, se ne possa formare un poligono, in cui sia iscrittibile il cerchio, e purchè le altezze delle due, che si debbono congiugnere in corrispondenza in ciascuno degli angoli della base, sieno tra loro uguali.

AV-

AVVERTIMENTO.

261. Si noti che il mezzo poliedro cilindrico può essere composto ancora da mezze ugne cilindriche, che hanno per basi le quarte parti di ovali, e di ovali uguali, e conseguentemente da mezze ugne cilindriche, ricavate da un' istesso cilindro retto, formato su d' una ovale. Però in sì fatto caso; o che OP sia la metà dell' asse maggiore dell' ovale, o la metà dell' asse minore, s' avrà sì la superficie, che la solidità del mezzo poliedro dalla somma sì delle superficie, che delle solidità delle mezze ugne, che compongono il mezzo poliedro, determinate secondo s' è già insegnato.

PROP. XV. TEOR. XIII.

Fig. 59. 262. *Contrassegni ABCDO qualunque mezzo poliedro piano-cilindrico. Dico che la sua superficie curva uguaglia quella del mezzo cilindro, che ha per base il mezzo cerchio ALB, e per altezza EP, tante volte presa, quante volte il dinota il numero de' lati del poligono ABCD; toltone il doppio dell' istesso poligono; e che la sua solidità uguaglia quella dell' istesso detto mezzo cilindro, presa pure tante volte, quante volte il disegna il numero de' lati del poligono ABCD, toltone però il doppio della piramide, che ha per base il poligono ABCD, e per altezza PO.*

DI-

DIMOSTRAZIONE.

S' intendano le mezze periferie ALB, BMC, CND, DQA divise in due parti uguali in L, M, N, Q; e s' intendano congiunte sì le rette LO, MO, NO, QO, che i raggi EL, FM, GN, HQ. Essendo EL perpendicolare ad AB, e conseguentemente perpendicolare al piano ABCD (§ 9); sarà EL parallela a OP (§ 56). E' di più EL = OP. Dunque ELOP è un rettangolo. E perciò APBLO è una lunetta cilindrica, formata dalle due mezze lunette EPOLA, EPOLB, che s' uniscono nel rettangolo EPOL (§ 236). Similmente si dimostra essere le altre parti BPCMO, CPDNO, DPAQO del mezzo poliedro anche lunette cilindriche. In oltre la superficie cilindrica della mezza lunetta EPOLA, e la sua solidità uguagliano rispettivamente la superficie, e la solidità del quadrante cilindrico, che ha per base il quadrante circolare AEL, e per altezza LO, o PE, toltone rispettivamente la superficie cilindrica, e la solidità della mezza ugna, che al medesimo quadrante cilindrico appartiene, cioè toltone per riguardo della superficie il doppio del triangolo APE, e per riguardo della solidità il doppio della piramide, che ha per base l' istesso triangolo APE, e per altezza PO (§§ 242, e 251).

E

E perciò la superficie cilindrica dell' intera lunetta APBLO, e la sua solidità uguagliano rispettivamente la superficie, e la solidità del mezzo cilindro, che ha per base il mezzo cerchio ALB, e per altezza PE, toltone per riguardo della superficie il doppio del triangolo APB, e per riguardo della solidità il doppio della piramide, che ha per base il triangolo APB, e per altezza PO. L'istesso si dimostra per rispetto di tutte le altre lunette, componenti il mezzo poliedro ABCDO. Dunque, essendo tutt' i mezzi cilindri, che hanno per basi i mezzi cerchi ALB, BMC, CND, DQA, e per altezze rispettivamente EP, FP, GP, HP uguali, sarà la superficie curva del mezzo poliedro ABCDO uguale alla superficie cilindrica del mezzo cilindro, che ha per base il mezzo cerchio ALB, e per altezza EP, tante volte presa, quante volte il dinota il numero de' lati del poligono ABCD, toltone il doppio dell'istesso poligono ABCD; e sarà la solidità uguale alla solidità dell' istesso detto mezzo cilindro, tante volte pure presa, quante volte il dinota il numero de' lati del poligono ABCD, toltone il doppio della piramide, che ha per base l'istesso poligono ABCD, e per altezza PO. Ch' è ciò, che bisognava dimostrare.

CO-

COROLLARIO.

263. Sicchè con 6, 8, 10, 12, ec. mezze lunette cilindriche d'uguali basi, e d'uguali altezze si può fare un mezzo poliedro piano cilindrico, che abbia per base un triangolo equilatero, un quadrato, un pentagono regolare, un esagono regolare, ec.; purchè l'altezza d'ognuna di esse sia uguale al raggio del cerchio iscrittibile nelle dette figure regolari.

AVVERTIMENTO.

264. Si noti che il mezzo poliedro piano cilindrico può essere composto ancora da mezze lunette cilindriche, che hanno per basi le quarte parti di ovali, e di ovali uguali, e conseguentemente da mezze lunette ricavate da un istesso cilindro retto, fermato su d'una ovale. Però in sì fatto caso o che OP sia la metà dell'asse maggiore, o la metà dell'asse minore, s'avrà sì la superficie, che la solidità del mezzo poliedro dalla somma sì delle superficie, che delle solidità delle mezze lunette, che compongono il mezzo poliedro, determinate secondo i modi già insegnati.

CAP.

CAP. VI.

De' modi di determinare le grandezze delle superficie interne, e delle solidità delle Volte, che dalle teoriche fin qui insegnate derivano.

DEFINIZIONE I.

265. Si dice *Volta* quella coperta di stanze, o di altri edifizj, fatta di fabbrica.

DEFINIZIONE II.

266. Si chiama *Vano* della volta lo spazio compreso tra la superficie interna della volta, e 'l piano, in cui la medesima superficie termina dalla parte inferiore.

DEFINIZIONE III.

267. Si dirà *Base* del vano della volta il piano, in cui il vano termina della parte inferiore.

DE-

DEFINIZIONE IV.

268. Si dirà *Volta cilindrica* quella, il cui vano sarà la metà, o altra porzione minore di cilindro, diviso secondo la direzione de' suoi lati.

AVVERTIMENTO.

269. Si noti che la volta cilindrica si chiama comunemente *Volta a botte*; però a noi è piaciuto darle un nome più conveniente alla sua figura. Si noti altresì che il cilindro, di cui è parte il vano della volta cilindrica, può essere e retto, e obbliquo, e può avere per base un cerchio, o un' ovale.

DEFINIZIONE V.

270. Intenderemo per *Volta a padiglione* quella, il cui vano sarà un mezzo poliedro cilindrico. La volta a padiglione si dirà di *giusto sesto*, se l'altezza del mezzo poliedro sarà uguale al raggio del cerchio iscrittibile nella sua base; si dirà poi di *sesto maggiore*, o *minore*, secondochè la detta altezza sarà maggiore, o minore del raggio del detto cerchio.

DEFINIZIONE VI.

271. Intenderemo per *Volta cilindrica co' mezzi padiglioni* quella, che sarà composta da una volta cilindrica, e dalle due metà d'una volta a padiglione, aggiunte alle due estremità della cilindrica.

DEFINIZIONE VII.

272. Intenderemo per *Volta a schifo* quella, il cui vano sarà composto nel mezzo da un prisma retto, che avrà per base una figura simile, e similmente posta alla base del vano, ne' lati da quadranti cilindrici, e negli angoli dalle parti d'una volta a padiglione, che avrà la base equiangola colla base del vano.

DEFINIZIONE VIII.

273. Intenderemo per *Volta a lunette* quella, il cui vano sarà un mezzo poliedro piano-cilindrico. La volta a lunette si dirà di *giusto sesto*, se l'altezza del mezzo poliedro sarà uguale al raggio del cerchio iscrittibile nella sua base; si dirà poi di *sesto maggiore*, o *minore*, secondochè la detta altezza sarà maggiore, o minore del detto raggio. Finalmente, se la volta a lunette avrà per ba-

base un quadrato, si dirà allora *Volta a crociera*.

AVVERTIMENTO

274. Si noti che i spigoli della volta a padiglione, della volta cilindrica co' mezzi padiglioni, e della volta a schifo sono incavati all'in su all'indentro della volta; i spigoli poi della volta a lunette risaltano in fuori verso il pavimento.

DEFINIZIONE IX.

275. Intenderemo per *Volta a vela* quella, il cui vano sarà sì una metà, o altra porzione minore di sfera, che un mezzo sferoide, nato dalla rivoluzione d' una mezza ovale, mossa intorno a qualunque de' suoi assi; mancante però ognuno di tali solidi di quattro porzioni, tagliate da quattro sezioni verticali alla sua base, e sezioni tali, che le opposte sieno uguali, e parallele, che cogli estremi de' loro perimetri si tocchino scambievolmente nel perimetro della sua base, e che colle intersezioni, che fanno nell' istessa base, costituiscano sempre o un quadrato, o un rettangolo.

AVVERTIMENTO.

276. Si noti che, se il vano è parte di sfera, le dette sezioni sono metà, o altre porzioni minori di cerchi, e di cerchi minori della sfera; se poi è parte di sferoide, le due sezioni corrispondenti all'asse della rivoluzione sono mezzi cerchi, e le altre due sono della spezie delle ovali.

PROP. XVI. PROBL. III.

277. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta cilindrica.*

SOLUZIONE.

1. Si determini la superficie cilindrica del vano della volta; e così s'avrà la superficie cercata.

2. Si determini il vano cilindrico, e si cerchi la differenza, che v'è tra lui, e'l parallelepipedo, che ha la base uguale a quella del vano, e l'altezza uguale alla perpendicolare innalzata sulla base del vano, e prolungata fino alla superficie esterna della volta.

Darà sì fatta differenza la solidità della volta.

PROP.

PROP. XVII. PROBL. IV.

278. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta a padiglione.*

SOLUZIONE.

1. Si determinino la superficie, e la solidità del mezzo poliedro cilindrico, che forma il vano della volta.

La superficie determinata darà la superficie cercata.

2. Si cerchi la differenza, che passa tra la solidità determinata, e 'l parallelepipedo, che ha la base uguale a quella del vano, e l'altezza uguale all'altezza del vano, prolungata fino alla superficie esterna della volta.

Darà sì fatta differenza la solidità della volta.

PROP. XVIII. PROBL. V.

279. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta cilindrica co' mezzi padiglioni.*

SOLUZIONE.

1. Si determinino e le superficie, e le soli-

solidità sì della parte cilindrica della volta, che delle due parti rimanenti, le quali insieme formano un' intera volta a padiglione.

La somma delle superficie determinate darà la superficie cercata.

2. Si cerchi la differenza, che passa tra la somma delle solidità determinate, e 'l prisma, che ha la base uguale a quella del vano, e l'altezza uguale all' altezza del vano cilindrico, prolungata fino alla superficie esterna della volta.

Darà sì fatta differenza la solidità cercata della volta.

PROP. XIX. PROBL. VI.

280. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta a schifo.*

SOLUZIONE.

1. Si determinino e le superficie, e le solidità sì de' quadranti cilindrici, che del mezzo poliedro cilindrico, le cui parti si trovano negli angoli della volta.

La somma delle superficie determinate, una col piano, ch'è nel mezzo della volta, darà la superficie cercata.

2. Si cerchi la differenza, che passa tra la somma delle solidità determinate, una col prisma, che ha per base il piano di mezzo del-

della volta, e per altezza la perpendicolare calata da qualunque punto di sì fatto piano sulla base del vano, e 'l prisma, che ha per base quella del vano, e per altezza l'altezza anzidetta, prolungata fino alla superficie esterna della volta.

Darà sì fatta differenza la solidità cercata della volta.

PROP. XX. PROBL. VII.

281. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta a lunette.*

SOLUZIONE.

1. Si determinino e la superficie, e la solidità del mezzo poliedro piano-cilindrico, che forma il vano della volta.

La superficie determinata darà la superficie cercata della volta.

2. Si cerchi la differenza, che passa tra la solidità determinata, e 'l prisma, che ha la base uguale a quella del vano, e l'altezza uguale all'altezza dell'istesso vano, prolungata fino alla superficie esterna della volta.

Darà sì fatta differenza la solidità della volta.

PROP. XXI. PROBL. VIII.

282. *Determinare la superficie interna, e la solidità di qualunque volta a vela, ch'è parte di sfera.*

SOLUZIONE.

Si determinino sì la superficie, e la solidità della porzione della sfera, di cui è parte il vano della volta, che la superficie, e la solidità delle parti, per le quali il vano manca dall'istessa porzione sferica.

La differenza della superficie delle dette parti, che mancano, dalla superficie della porzione sferica darà la superficie cercata della volta.

La differenza poi della solidità delle medesime parti, che mancano, dalla solidità dell'istessa porzione sferica darà la solidità cercata della volta.

AVVERTIMENTO I.

283. Si noti che, se il vano della volta a vela è parte d'un mezzo sferoide, nato dalla rivoluzione d'una mezza ovale, mossa intorno a uno de' suoi assi, non si può allora con alcuna regola geometrica determinare nè la sua superficie, nè la sua solidità.

Per-

Perchè, sebbene coll' ajuto della Geometria sieno determinabili la superficie, e la solidità del mezzo sferoide, e determinabili altresì le superficie, e le solidità delle due porzioni del mezzo sferoide, che mancano nel vano verso gli estremi dell' asse della rivoluzione: nientedimeno per determinare le superficie, e le solidità delle altre due porzioni dell' istesso mezzo sferoide, che mancano pure nel vano, la Geometria non ci somministra regola alcuna.

AVVERTIMENTO II.

284. Del resto nella pratica, senz' allontanarsi molto dal vero, si possono le superficie curve, e le solidità delle due porzioni del detto vano, che corrispondono agli estremi dell' asse dell' ovale, ch' è perpendicolare a quello della rivoluzione, determinare a questo modo. Sieno ABCD la base del vano, LNMP l' ovale, LM, NP i suoi assi, e LM l' asse della rivoluzione. Sia di più NEPG il cerchio, che ha per diametro NP. Si determini prima sì la superficie, che la solidità della porzione sferica, descritta da ENG girando intorno a NP. Poscia si trovino due quarte proporzionali, una in ordine alla periferia NEPG, al perimetro LNMP dell'ovale, e alla superficie già determinata della porzione sferica,

Fig. 60, e 61.

rica, e l'altra in ordine alle rette ON, OL, e alla ſolidità dell' iſteſſa porzione sferica. S' avrà a un di preſſo colla prima di sì fatte quarte proporzionali il doppio della ſuperficie curva d'una delle dette porzioni del vano, e conſeguentemente la ſomma delle ſuperficie curve d' ambedue, e colla ſeconda la ſomma delle ſolidità delle medeſime porzioni. Determinate intanto a un dipreſſo le ſuperficie, e le ſolidità delle due dette porzioni, ſi potranno a un di preſſo determinare la ſuperficie interna, e la ſolidità della volta ancora.

Fine del quarto libro.

Tav. I.
Fig. 2
A
C
L
B
D
M
Fig. 4
A
F
B
E
C
D
Fig. 5
C
A
B
Fig. 7
A
L
B
E
C
D
F
M
Fig. 9
A
C
E
G
H
I
B
D
F
Aloja I.

Tav II.
Fig. 11
A
L
F
I
E
O
B
C
H
G
D
M
Fig. 14
Q
S
A
B
P
R
Fig. 16
L
B
O
D
A
M
C
N
Aloja Inc.

Tav. III.
Fig. 17
Fig. 19
Fig. 20
Fig. 22
Fig. 23

Tav. IV

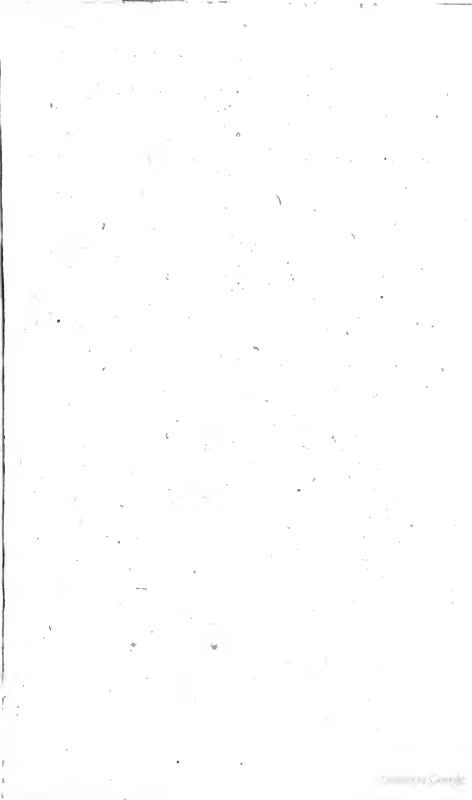
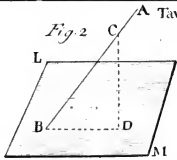
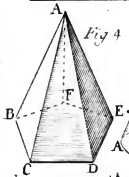
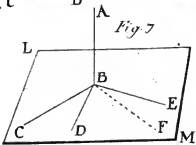
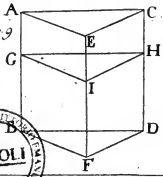
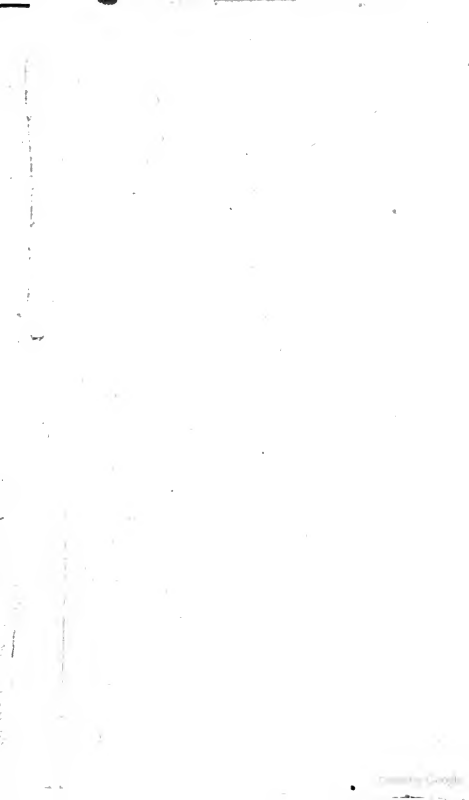
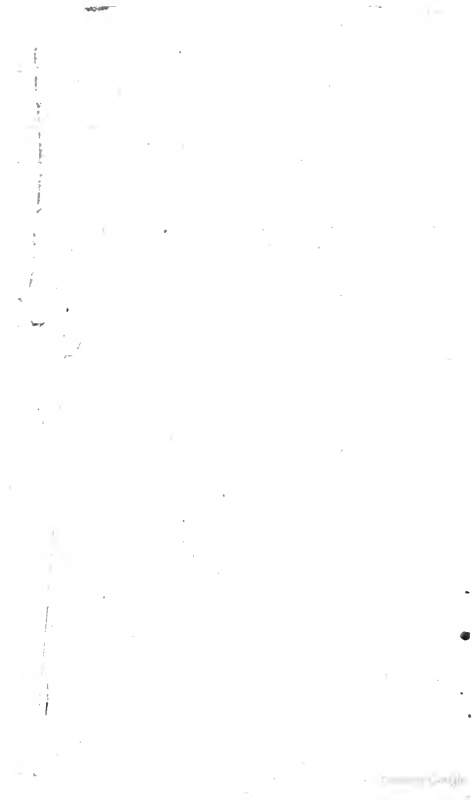
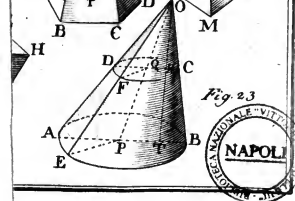
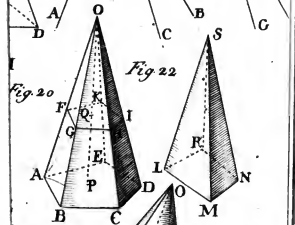
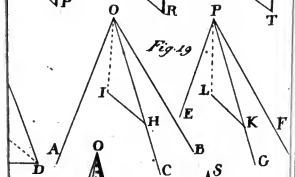
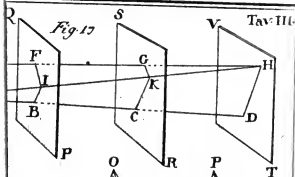
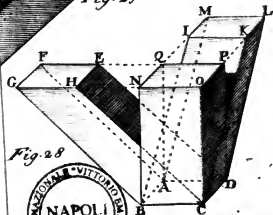
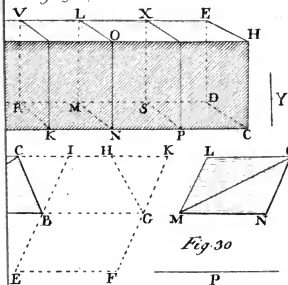
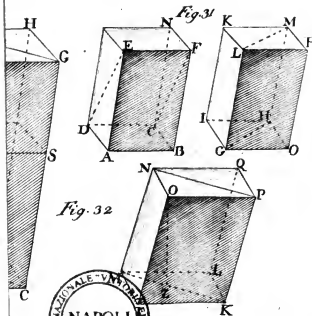



Fig. 24

Fig. 25

Fig. 26

Fig. 27

Fig. 28

Tav. V.
Fig. 29
V
L
X
E
H
O
R
M
S
D
Y
K
N
P
C
I
H
K
L
O
B
G
M
N
Fig. 30
E
F
P
Fig. 31
H
N
K
M
G
E
F
L
F
I
H
D
C
A
B
G
O
S
N
Q
O
P
Fig. 32
L
Z
C
K
Aloja Inc.

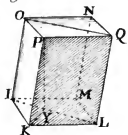
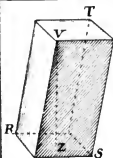
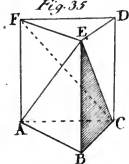
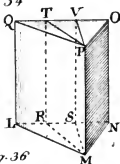
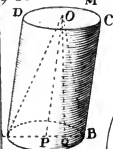
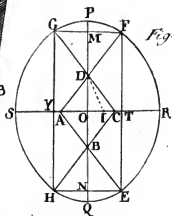
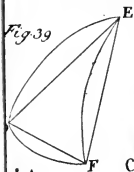
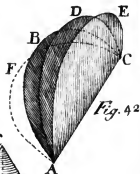
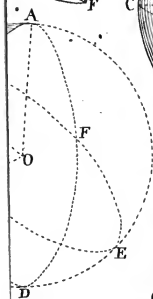
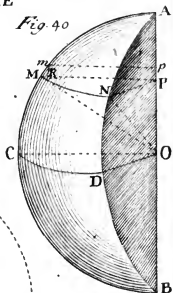
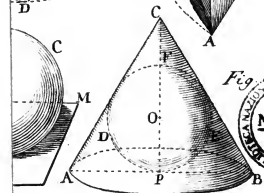
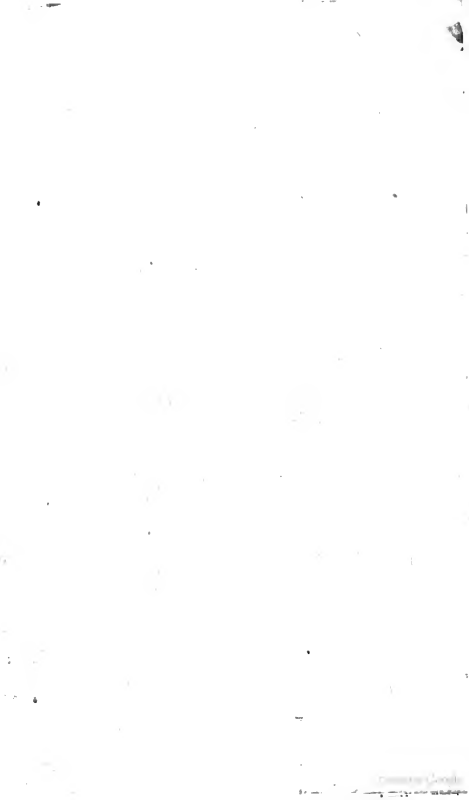
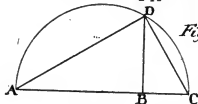
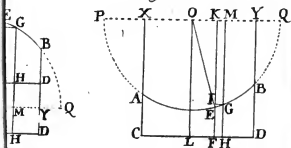
Tav.VI.
Fig.33
T
V
O
N
Q
P
R
Z
S
I
M
K
Y
L
Fig.34
Q
T
V
O
P
L
R
S
N
M
Fig.35
F
D
E
A
C
B
Fig.36
D
O
C
P
Q
B
N
Fig.37
G
P
F
M
D
S
Y
A
O
I
C
T
R
B
N
H
Q
E
Fig.38
E
Aloja In.

Tav. VII
Fig. 39
E
F
Fig. 40
A
m
p
M
R
P
N
C
O
D
B
A
F
O
E
D
D
E
B
C
F
Fig. 42
A
C
F
O
D
E
A
P
B
M
C
Fig. 44

Tav. VIII.
Fig. 46
Fig. 48
Fig. 49
Fig. 50

Fig. 53
Q
C
O
P
B
E
Fig. 54
C
Q
M
A
G
O
D
N
R
E
L
F
P
B
Fig. 57
D
E
O
C
A
O
B
D
O
B
C
Fig. 56
D
M
A
N
B
O
P
L
C
O
G
B
P
F
A
Alaja Inc.

Tav. X.

Fig. 59

Fig. 61

Aloja f.